ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5ο – ΛΥΣΕΙΣ/ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

① Δ|(Ε): Ελατ (Α): Κανονικός / Εμφ. καλαθιά.
Σ| i) ΔΧ ii) Ε={5 λάμπες} iii) Δ={τουλ 5 λάμπες} iv) Β={το πολύ 5

i) 1ος 2ος 3ος 4ος 5ος

Ω={Ε, ΑΕ, ΑΑΕ, ΑΑΑΕ, ΑΑΑΑΕ, ...}

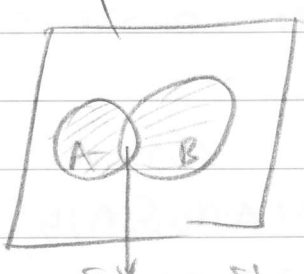
ii) Ε={ΑΑΑΑΕ} iii) Δ={ΑΑΑΑΕ, ΑΑΑΑΑΕ, ...}
iv) Β={Ε, ΑΕ, ΑΑΕ, ΑΑΑΕ, ΑΑΑΑΕ}

② Δ|Α,Β⊆Ω P(Α)=0,4, P(Β)=0,6 P(Α∪Β)=0,9
Σ| i) Α∩Β≠∅ ii) P(Α∩Β)=; iii) μονο ένα από Α,Β
iv) τουλ ένα από Α,Β v) ακριβώς ένα από Α,Β
vi) κανένα από Α,Β.

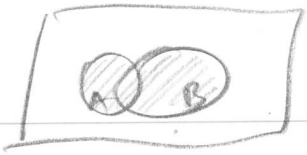
i) Έστω Α,Β ασυμβίβαστα τότε από ορισμ. ισχύει:
P(Α∪Β)=P(Α)+P(Β) ⇔ 0,9=0,4+0,6 ⇔ 0,9=1 άτοπο
Συνεπώς Α,Β όχι ασυμβίβαστα.

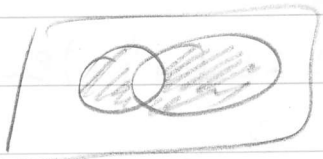
ii) Από προηγούμενο νόμο P(Α∪Β)=P(Α)+P(Β)−P(Α∩Β)
⇔ P(Α∩Β)=P(Α)+P(Β)−P(Α∪Β)=0,4+0,6−0,9=0,1

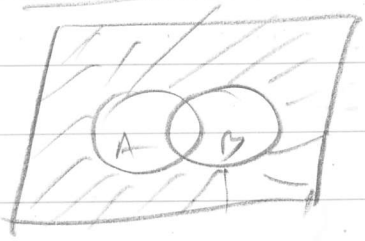
iii) ΓΕΝΙΚΗ ΟΔΗΓΙΑ: για να εντοπίσουμε εύκολα σε ποιες πράξεις ενδεχομένων αντιστοιχεί το ζητούμενο κάνουμε αντίστοιχο διάγραμμα Venn



άρα ζητείται P((Α∪Β)−(Α∩Β)) =
P((Α∪Β)) − P((Α∪Β)∩(Α∩Β)) =
P((Α∪Β)) − P(Α∩Β) = 0,9 − 0,1 = 0,8

iv)  $P(A \cup B) = 0,9$

v)  όπως στο iii

vi)  $P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,9 = 0,1$

(3) Δεν ισχύει.

Αντιπαράδειγμα: Έστω $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ ισοπίθανα στοιχεία

$A = \{1,2\}$ $B = \{3,4,5\}$

$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{5} = 0,4$ $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{5} = 0,6$

$P(A) \leq P(B)$ όμως $A \cap B = \emptyset$

και γενικά τα ενδεχόμενα δεν είναι πάντα συγκρίσιμα μεταξύ τους.

(4) Δ | κοκ, Πρα, Μαυρο Σάρι $\xrightarrow{\text{Π.Τ.}}$ Χρώμα και Ενδυμ

2 | Ω, $P(A)$: $A = \{$κοκ, $\leq 4\}$, $P(B) \Rightarrow$: $B = \{$αρνο $> 2\}$

α) $\Omega = \{K1, K2, K3, K4, K5, K6, \Pi1, \Pi2 \ldots, \Pi6, M1, M2, \ldots, M6\}$ $N(\Omega)$

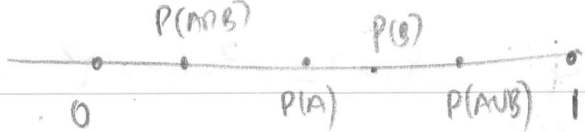
β) $A = \{K1, K2, K3, K4\}$ $P(A) = N(A)/N(\Omega) = 4/18 = 2/9$

γ) $B = \{K4, K6, \Pi4, \Pi6, M4, M6\}$ $P(B) = 6/18 = 1/3$

(5) $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$

- Αν $A = B \Rightarrow P(A) = P(B) = P(A \cap B) = P(A \cup B)$ οπότε όλα τα σύνολα θα ταυτίζονται
- Έστω $A \neq B$ και $A \not\subseteq B$, $B \not\subseteq A$

αν $P(A) < P(B)$ ισχύει αυτόματα $A \cap B \subseteq A$, $B \subseteq A \cup B$ $\Rightarrow 0 \leq P(A \cap B) \leq P(A), P(B) \leq P(A \cup B) \leq 1$



Όμως $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow$

$P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+P(B) \Leftrightarrow$

$\frac{P(A\cup B)+P(A\cap B)}{2}=\frac{P(A)+P(B)}{2}$

Ομοίως αν $P(B)<P(A)$ ή $A\subseteq B$

(6) $\lambda(2x+1)+1=\lambda(2-1)+2x$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Α) Να λυθεί $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

$\lambda^2x-\lambda+1=\lambda(2-1)+2x \Leftrightarrow$

$\lambda^2x-\lambda x=\lambda(2-1)+(2-1) \Leftrightarrow$

$\lambda(\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda+1)$ (1)

- Αν $\lambda(\lambda-1)\neq 0$ τότε $x=\frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{\lambda(\lambda-1)}=1+\frac{1}{\lambda}$
- Αν $\lambda=0$ η (1) γίνεται $0\cdot x=-1$ αδύνατη $\forall x\in\mathbb{R}$
- Αν $\lambda=1$ η (1) γίνεται $0\cdot x=0$ αόριστη, άπειρες λύσεις $x\in\mathbb{R}$.

Β) $\Omega=\{-1,0,1,2,3,4\}$ $\lambda\in\Omega$

α) $A=\{$Η (1) αδύνατη$\}$

$A=\{-1\}$ $P(A)=1/6$

β) $B=\{\lambda\in\Omega:$ Η (1) έχει λύση μεγαλύτερη του 1 ή ταυτότητα$\}$

Ταυτότητα για $\lambda=1$

Λύση μεγαλύτερη του 1: $1+\frac{1}{\lambda}>1 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}>0 \Leftrightarrow \lambda>0$

ή αόριστη οπότε έχει λύση μεγαλύτερη του 1 άρα $\lambda=1$

Συνεπώς $B=\{1,2,3,4\}$ άρα $P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

γ) $P((A\cup B)')=P(\{-1,1,2,3,4\}')=P(\{0\})=\frac{1}{6}$

(7) $\lambda \in \mathbb{Z}$, $-5 \le \lambda \le 4$ $\quad f(x) = x^2 - 6x + \lambda^2$ τελ. τετρ.

$\Omega = \{\lambda \in \mathbb{Z}, -5 \le \lambda \le 4\}$

$A = \{\lambda \in \Omega : f(x)$ τελειο τετράγωνο$\}$

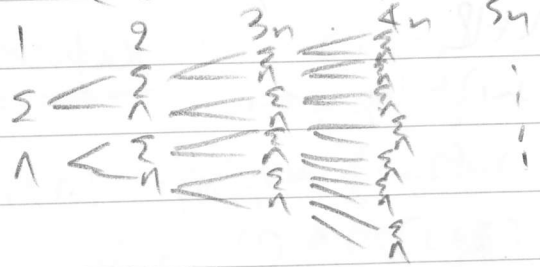
$f(x)$ τελειο τετράγωνο $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 36 - 4\lambda^2 = 0$

$\Leftrightarrow 9 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3$

άρα $A = \{-3, +3\}$ $\quad P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

(8) 5 Σ-Λ $\quad P(\text{σωστες και οι } 5,) = A$

i) Ω:



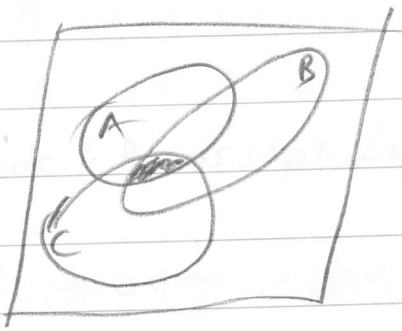
$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

Πλήθος πιθανών απαντήσεων: $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, $32 = 2^5$

ii) Ομοιως $P = \frac{1}{2^{20}}$ $\quad$ iii) $P = \frac{1}{2^v}$

(9) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

i) Ισχύει προσθετικό για τρία ενδεχόμενα) $P(A \cup B \cup C) =$



$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A$
$- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Ερώτηση: Ισχύει κάτι αντίστοιχο κα
για 4 ενδεχόμενα;

ii) 1, 2, 3 τυχαία → A = τουλ. ενα σωστή στερή

Δυνατες γραφές: 1, 2, 3 – 1, 3, 2 – 2, 1, 3 – 2, 3, 1 –
3, 1, 2 – 3, 2, 1

Τουλ. ενα σωστα: 1, 2, 3 – 1, 3, 2 – 2, 1, 3 – 2, 3, 1 – 3,

οχι: 3, 2, 1 άρα $P(A) = \frac{5}{6}$