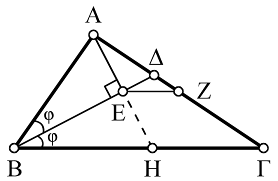
Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

Ασκήσεις για επανάληψη

Μπάμπης Στεργίου

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος ΒΔ, η προβολή Ε του Α πάνω στην ευθεία ΒΔ και η παράλληλη από το Ε προς τη ΒΓ, που τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Να αποδειχθεί ότι $ZA = Z\Gamma$.

Λύση



Προεκτείνουμε την ΑΕ μέχρι να συναντήσει τη ΒΓ στο Η. Στο τρίγωνο ΒΑΗ η ΒΕ είναι διχοτόμος και ύψος. Επομένως αυτό είναι ισοσκελές, οπότε το Ε είναι μέσο της ΑΗ.

Στο τρίγωνο ΑΗΓ η ΕΖ διέρχεται από το μέσο Ε της ΑΗ και είναι παράλληλη προς την ΗΓ. Άρα το Ζ είναι μέσο και της ΑΓ. Επομένως $ZA = Z\Gamma$.

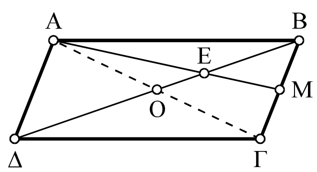
2. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, το μέσο Μ του ΒΓ και το σημείο τομής Ε των ΑΜ και ΒΔ. Να αποδειχθεί ότι:

α) $AE = 2EM$,

β) $\Delta E = 2EB$,

γ) η ευθεία ΓΕ διέρχεται από το μέσο της ΑΒ.

Λύση



α) Φέρνουμε τη διαγώνιο ΑΓ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ οι ΑΜ και ΒΟ είναι διάμεσοι, οπότε το Ε είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου. Άρα $AE = 2EM$.

β) Είναι:

$$\Delta E = \Delta O + OE = BO + OE = (BE + OE) + OE =$$

$$= BE + 2OE = BE + BE = 2BE$$

διότι $BE = 2OE$.

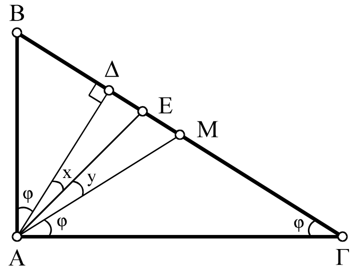
γ) Επειδή το Ε είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, η ευθεία ΓΕ είναι ο φορέας της τρίτης διαμέσου. Άρα η ΓΕ διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΑΒ.

3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A} = 90^o$. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ, τη διχοτόμο ΑΕ και τη διάμεσο ΑΜ. Να αποδειχθεί ότι $E\hat{A}\Delta = E\hat{A}M$.

Λύση

Όταν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο φέρουμε το ύψος ΑΔ προς την υποτείνουσα, τότε μια πολύ χρήσιμη παρατήρηση είναι ότι:

$$\hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}B \quad \text{και} \quad \hat{B} = \Delta\hat{A}\Gamma$$



Είναι λοιπόν $\hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}B = \varphi$, οπότε:

- $x = E\hat{A}B - \Delta\hat{A}B = \dfrac{\hat{A}}{2} - \varphi = 45^o - \varphi \quad (1)$
- $y = E\hat{A}\Gamma - M\hat{A}\Gamma = \dfrac{\hat{A}}{2} - M\hat{A}\Gamma = 45^o - M\hat{A}\Gamma \quad (2)$

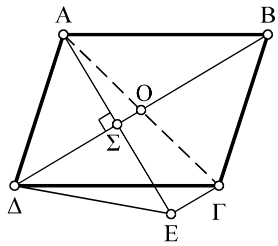
Όμως, στο ορθογώνιο τρίγωνο, η διάμεσος ΑΜ προς την υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της. Επομένως $MA = M\Gamma$, οπότε $M\hat{A}\Gamma = \hat{\Gamma} = \varphi$.

Έτσι από τη σχέση (2) παίρνουμε ότι $y = 45^o - \varphi \quad (3)$.

Άρα οι σχέσεις (1) και (3) δίνουν $x = y$, δηλαδή $E\hat{A}\Delta = E\hat{A}M$.

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και το συμμετρικό Ε του σημείου Α ως προς τη διαγώνιο ΒΔ. Να αποδειχθεί ότι το ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση



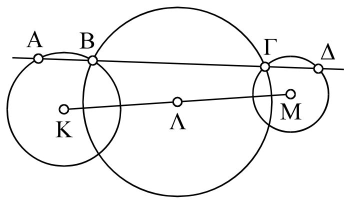
Επειδή το Ε είναι το συμμετρικό του Α, ως προς τη ΒΔ, θα ισχύουν:

- $\Delta E = \Delta A = B\Gamma$,
- $\Sigma A = \Sigma E$, όπου Σ είναι το σημείο τομής των τμημάτων ΑΕ και ΒΔ.

Φέρνουμε και τη διαγώνιο ΑΓ, που τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Ο. Επειδή $\Sigma A = \Sigma E$ και $OA = O\Gamma$, από το τρίγωνο ΑΕΓ, προκύπτει ότι $\Sigma O \,//\, E\Gamma$.

Άρα είναι και $B\Delta \,//\, E\Gamma$. Επομένως το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι τραπέζιο και επειδή $E\Delta = \Gamma B$, είναι ισοσκελές τραπέζιο.

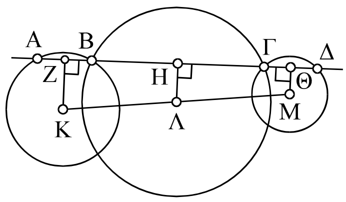
5. **Τρεις άνισοι κύκλοι έχουν τα κέντρα τους στην ίδια ευθεία, όπως δείχνει το διπλανό σχήμα. Αν $ΚΛ = ΛΜ$, να αποδειχθεί ότι $ΑΒ = ΓΔ$.**



Λύση

Έστω ΚΖ, ΛΗ, $ΜΘ \perp ΑΔ$. Προφανώς είναι ΚΖ //ΛΗ // ΜΘ, ως κάθετες στην ίδια ευθεία.

Το τετράπλευρο ΚΖΘΜ είναι τραπέζιο και το Λ είναι μέσο της μη παράλληλης πλευράς ΚΜ. Επειδή ΛΗ // ΚΖ, το Η θα είναι μέσο της ΖΘ. Ισχύει δηλαδή:



$$ΗΖ = ΗΘ \quad (1)$$

Επειδή τα ΚΖ, ΛΗ και ΜΘ είναι αποστήματα των χορδών ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα, έχουμε ότι:

$$ΖΑ = ΖΒ,\ ΗΒ = ΗΓ \text{ και } ΘΓ = ΘΔ \quad (2)$$

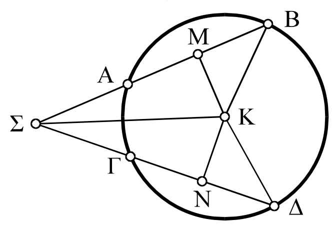
Η σχέση (1) δίνει οπότε:

$$ΗΒ + ΒΖ = ΗΓ + ΓΘ \overset{(2)}{\Leftrightarrow} ΒΖ = ΓΘ \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΓΔ}{2} \Leftrightarrow ΑΒ = ΓΔ$$

6. **Δίνεται κύκλος κέντρου Κ και ένα σημείο Σ στο εξωτερικό του. Από το Σ φέρνουμε δύο τέμνουσες ΣΑΒ και ΣΓΔ τέτοιες, ώστε $ΣΒ = ΣΔ$. Να αποδειχθεί ότι $ΣΑ = ΣΓ$.**

Λύση

Φέρνουμε τις ΚΒ, ΚΔ και ΚΣ. Τότε τα τρίγωνα ΣΚΒ και ΣΚΔ είναι ίσα, διότι:



- η ΣΚ είναι κοινή
- $ΚΒ = ΚΔ = R$
- $ΣΒ = ΣΔ$

Άρα $Κ\hat{Σ}Β = Κ\hat{Σ}Δ$, που σημαίνει ότι η ΣΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β\hat{Σ}Δ$.

Φέρνουμε $ΚΜ \perp ΣΒ$ και $ΚΝ \perp ΣΔ$. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΚΒ και ΝΚΔ είναι ίσα, διότι:

- $ΚΒ = ΚΔ = R$

- $\hat{B} = \hat{\Delta}$, αφού τα τρίγωνα $K\Sigma B$ και $K\Sigma\Delta$ είναι ίσα.

Άρα $KM = KN$, οπότε και οι χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι ίσες. (Σε ίσες χορδές αντιστοιχούν ίσα αποστήματα και αντιστρόφως.)

Επειδή $AB = \Gamma\Delta$ και $\Sigma B = \Sigma\Delta$, παίρνουμε ότι:

$$\Sigma B = \Sigma\Delta \Leftrightarrow \Sigma A + AB = \Sigma\Gamma + \Gamma\Delta \Leftrightarrow \Sigma A = \Sigma\Gamma$$

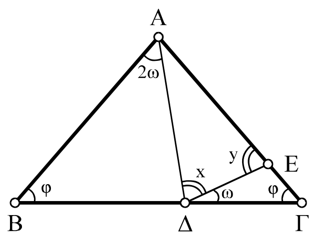
7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, με $AB = A\Gamma$, σημείο Δ στη βάση ΒΓ και σημείο Ε στην πλευρά ΑΓ τέτοιο, ώστε $B\hat{A}\Delta = 2\Gamma\hat{\Delta}E$. Να αποδειχθεί ότι:

$$\mathbf{A\Delta = AE}$$

(Διαγωνισμός ΕΜΕ)

Λύση

Είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \varphi$, $E\hat{\Delta}\Gamma = \omega$ και $B\hat{A}\Delta = 2\omega$.



- Από το τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε:

$$A\hat{\Delta}\Gamma = 2\omega + \varphi \Leftrightarrow x + \omega = 2\omega + \varphi \Leftrightarrow x = \varphi + \omega$$

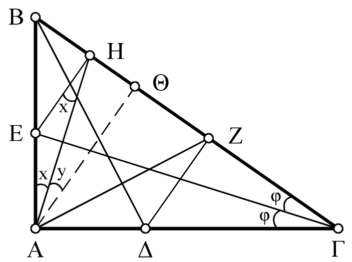
- Από το τρίγωνο ΔΕΓ έχουμε:

$$\Delta\hat{E}A = \omega + \varphi \Leftrightarrow y = \omega + \varphi$$

Επομένως $x = y$.

8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Αν ΕΗ, $\Delta Z \perp B\Gamma$, να αποδειχθεί ότι $H\hat{A}Z = 45^o$.

Λύση



Έστω $A\Theta \perp B\Gamma$. Επειδή το Ε είναι σημείο της διχοτόμου της $\hat{\Gamma}$ και επιπλέον $EA \perp A\Gamma$ και $EH \perp H\Gamma$, θα είναι $EH = EA$. Άρα:

$$\hat{A}_x = \hat{H}_x = x \qquad (1)$$

όπου $\hat{A}_x = E\hat{A}H$, $\hat{H}_x = E\hat{H}A$. Οι ΕΗ, ΑΘ είναι κάθετες στην πλευρά ΒΓ, οπότε ΕΗ // ΑΘ. Άρα $x = y$ (2), όπου $y = H\hat{A}\Theta$. Επομένως η ΑΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Theta$.

Όμοια, η ΑΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Theta\hat{A}\Gamma$. Άρα:

$$H\hat{A}Z = H\hat{A}\Theta + \Theta\hat{A}Z = \frac{B\hat{A}\Theta}{2} + \frac{\Gamma\hat{A}\Theta}{2} = \frac{90^o}{2} = 45^o$$

9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$), το ύψος ΑΔ, το μέσο Ε του ΓΔ και σημείο Ζ στην προέκταση του ΑΒ, ώστε $BZ = BA$. Να αποδειχθεί ότι $Z\Delta \perp AE$.

Λύση

Έστω Μ το μέσο του ΑΔ. Τότε ΕΜ // ΑΓ, οπότε:

$$EM \perp AB$$

Αλλά:

$$A\Delta \perp BE$$

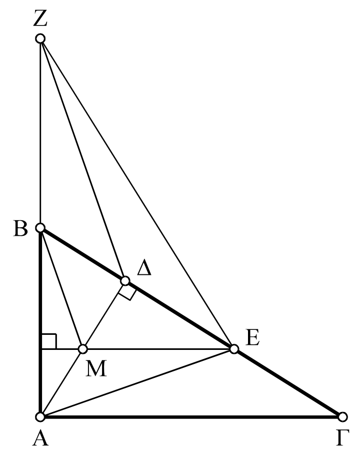
οπότε το Μ είναι ορθόκεντρο στο τρίγωνο ΒΑΕ. Άρα:

$$BM \perp AE$$

Όμως στο $\overset{\Delta}{A\Delta Z}$ είναι ΒΜ // ΖΔ και αφού:

$$BM \perp AE$$

θα είναι και $Z\Delta \perp AE$.



10. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A} = 45^o$ και $\hat{\Gamma} = 30^o$, φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ. Να αποδειχθεί ότι $M\hat{A}B = 30^o$.

Λύση

Φέρουμε $BN \perp A\Gamma$. Τότε:

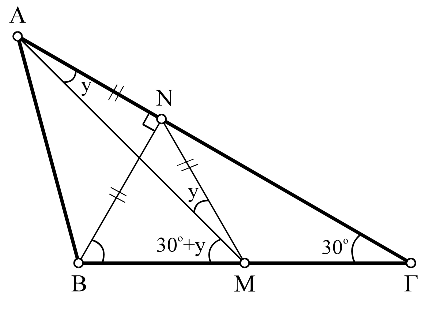
$$BN = \frac{B\Gamma}{2} = BM$$

και έτσι το τρίγωνο ΒΜΝ είναι ισόπλευρο. Επειδή $\hat{B} = 105^o$ και $N\hat{B}M = 60^o$, είναι:

$$A\hat{B}N = 45^o = \hat{A}$$

Άρα $NA = NB = NM$. Το τρίγωνο λοιπόν ΝΑΜ είναι ισοσκελές και επειδή:

$$A\hat{M}B = M\hat{A}\Gamma + M\hat{\Gamma}A = 30^o + y$$



έχουμε:

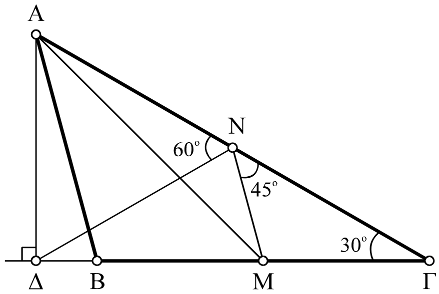
$$N\hat{M}B = 60^o \Leftrightarrow y + (30^o + y) = 60^o \Leftrightarrow y = 15^o$$

Αφού $M\hat{A}\Gamma = y = 15^o$ και $\hat{A} = 45^o$, είναι $M\hat{A}B = 30^o$.

Άλλος τρόπος

Φέρουμε το ύψος ΑΔ και τη διάμεσο ΔΝ του $\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}$. Είναι ΜΝ // ΑΒ, οπότε:

$M\hat{N}\Gamma = 45^o$ και $\Delta\hat{M}N = 45^o + 30^o = 75^o$



Το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισόπλευρο, αφού $\Delta N = \frac{A\Gamma}{2} = AN$ και $\Delta\hat{A}N = 60^o$. Άρα:

$$\Delta\hat{N}M = 75^o = \Delta\hat{M}N$$

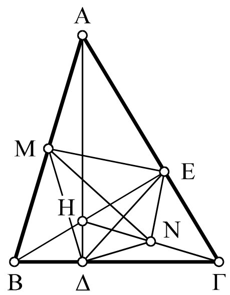
Επομένως $\Delta A = \Delta M$ και αφού $A\hat{\Delta}M = 90^o$ είναι:

$$\Delta\hat{M}A = 45^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} + M\hat{A}\Gamma = 45^o \Leftrightarrow M\hat{A}\Gamma = 15^o \Leftrightarrow M\hat{A}B = 30^o$$

11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη ΑΔ, ΒΕ, που τέμνονται στο Η. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΗΓ, να αποδειχθεί ότι $MN \perp \Delta E$.

Υπόδειξη

Είναι:



$$M\Delta = ME = \frac{AB}{2}$$

και:

$$N\Delta = NE = \frac{H\Gamma}{2}$$

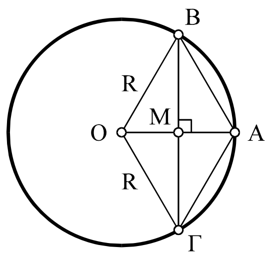
Άρα $MN \perp \Delta E$, διότι η ΜΝ είναι η μεσοκάθετος του ΔΕ.

12. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και μια ακτίνα του ΟΑ. Η μεσοκάθετος της ακτίνας ΟΑ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Να υπολογιστεί η γωνία $B\hat{O}\Gamma$.

Υπόδειξη

Φέρνουμε τις ΑΒ και ΑΓ. Επειδή τα σημεία της μεσοκαθέτου ισαπέχουν από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος, θα είναι:

$$BO = BA \quad \text{και} \quad \Gamma O = \Gamma A$$



Άρα:

$$BA = BO = R = OA \quad \text{και} \quad \Gamma A = \Gamma O = R = OA$$

Τα τρίγωνα λοιπόν ΟΑΒ και ΟΑΓ είναι ισόπλευρα. Άρα:

$$B\hat{O}\Gamma = 60^{o} + 60^{o} = 120^{o}$$

13. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^{o})$ φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας $B\hat{A}\Delta$ στο Ε. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ, να αποδειχθεί ότι:

α) το τρίγωνο ΜΑΕ είναι ισοσκελές,

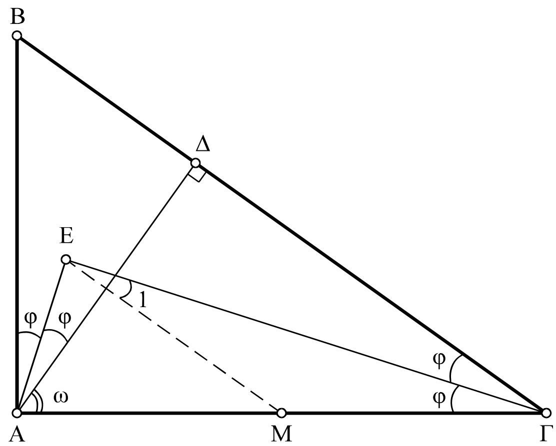
β) ΕΜ // ΒΓ.

Υπόδειξη

α) Επειδή $A\Delta \perp B\Gamma$, οι γωνίες $B\hat{A}\Delta$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες, ως συμπληρωματικές της γωνίας $\hat{B}$. Άρα:

$$E\hat{A}\Gamma + E\hat{\Gamma}A = (\varphi + \omega) + \varphi =$$

$$= 2\varphi + \omega = B\hat{A}\Delta + \Delta\hat{A}\Gamma = 90^{o}$$



Το τρίγωνο λοιπόν ΑΕΓ είναι ορθογώνιο στο Ε και επειδή η ΕΜ είναι η διάμεσος προς την υποτείνουσα, θα είναι:

$$EM = \frac{A\Gamma}{2} = MA$$

Άρα το τρίγωνο ΜΑΕ είναι ισοσκελές.

β) Αφού $EM = \frac{A\Gamma}{2} = M\Gamma$, το τρίγωνο $ME\Gamma$ είναι ισοσκελές. Άρα:

$$M\hat{E}\Gamma = M\hat{\Gamma}E = E\hat{\Gamma}B = \varphi$$

Από την ισότητα $M\hat{E}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$ προκύπτει ότι $EM \,//\, B\Gamma$.

14. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^o)$ είναι $\hat{B} = 30^o$. Η κάθετη από το Α προς τη διχοτόμο ΒΔ του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ τέμνει τη ΒΓ στο Ε. Να αποδειχθεί ότι:

α) $\Delta A = \Delta E$,

β) $B\Delta = 2AE$.

Υπόδειξη

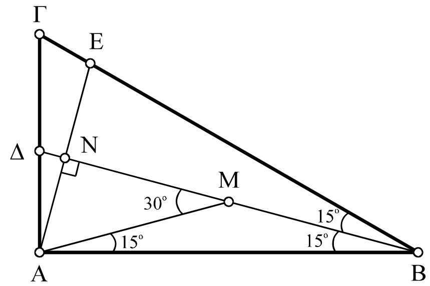
α) Στο $\overset{\Delta}{BAE}$ η ΒΔ είναι μεσοκάθετος. Άρα $\Delta A = \Delta E$.

β) Αν Μ είναι το μέσο της ΒΔ, τότε:

$$AM = \frac{B\Delta}{2} = MB$$

οπότε $A\hat{M}\Delta = 30^o$. Έτσι:

$$AN = \frac{AM}{2} \Leftrightarrow \frac{AE}{2} = \frac{B\Delta}{4} \Leftrightarrow B\Delta = 2AE$$



15. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 120^o$. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Δ, Ε, ώστε $B\Delta = \Delta E = E\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

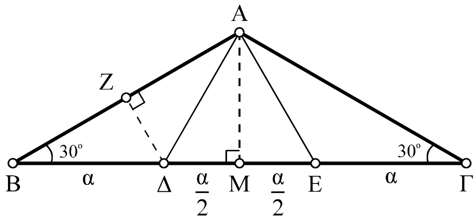
Υπόδειξη

Είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 30^o$. Φέρουμε $AM \perp B\Gamma$ και $\Delta Z \perp AB$. Αν θέσουμε:

$$B\Delta = \Delta E = E\Gamma = \alpha$$

τότε $\Delta M = \frac{\alpha}{2}$, διότι το ΑΔΕ είναι επίσης ισοσκελές. Επειδή $\hat{B} = 30^o$, είναι:

$$\Delta Z = \frac{\Delta B}{2} = \frac{\alpha}{2} = \Delta M$$



Άρα η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}M = 60^o$. Επομένως:

$$\Delta\hat{A}B = \frac{60^o}{2} = 30^o$$

και έτσι $A\hat{\Delta}E = 60^o$.

Όμοια παίρνουμε ότι $A\hat{E}\Delta = 60^o$, οπότε το $\overset{\Delta}{A\Delta E}$ είναι ισόπλευρο.

16. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^o)$, το ύψος ΑΔ, οι προβολές Ε, Ζ του Δ στις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα και οι προβολές Η, Θ των Ε, Ζ αντίστοιχα στη ΒΓ. Να αποδειχθεί ότι $\Delta H = \Delta\Theta$.

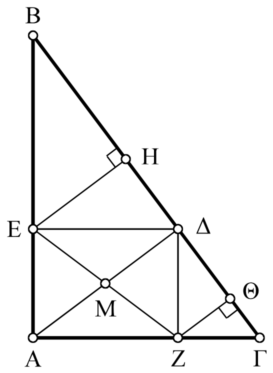
Υπόδειξη

Το ΑΕΔΖ είναι ορθογώνιο και επομένως οι ΑΔ, ΕΖ διχοτομούνται στο Μ. Αλλά:

$$EH \,//\, M\Delta \,//\, Z\Theta$$

Στο τραπέζιο λοιπόν ΕΖΘΗ η ΜΔ θα είναι διάμεσος, διότι το Μ είναι μέσο του ΕΖ. Άρα:

$$\Delta H = \Delta\Theta$$



17. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A} = 90^o$, η διάμεσος ΓΜ και η προβολή Δ του Α πάνω στη ΓΜ. Αν Ν είναι το μέσο του ΓΔ, να αποδειχθεί ότι $B\Delta \perp AN$.

Υπόδειξη

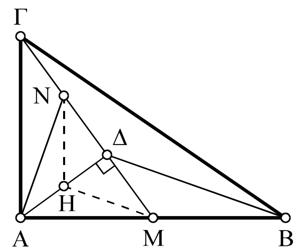
Έστω Η το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΔ.

Στο τρίγωνο ΑΔΒ το τμήμα ΜΗ ενώνει τα μέσα Μ και Η των πλευρών ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα. Επομένως:

$$MH \,//\, B\Delta \qquad (1)$$

Όμοια, από το τρίγωνο ΔΑΓ προκύπτει ότι ΝΗ // ΓΑ και επειδή $\Gamma A \perp AB$, θα είναι και $NH \perp AM$. Είναι ακόμη:

$$A\Delta \perp \Gamma M$$



Παρατηρούμε ότι στο τρίγωνο ΜΑΝ, οι ΝΗ και ΑΔ είναι οι ευθείες δύο υψών, οπότε το Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου αυτού. Επομένως η ΜΗ είναι η ευθεία του τρίτου ύψους, δηλαδή $MH \perp AN$. Λόγω της (1), θα είναι και $B\Delta \perp AN$.

18. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, το ύψος ΑΔ προς την υποτείνουσα ΒΓ, η διχοτόμος ΑΕ της γωνίας $\Delta\hat{A}B$ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, που τέμνει την ΑΔ στο Ζ. Να αποδειχθεί ότι:

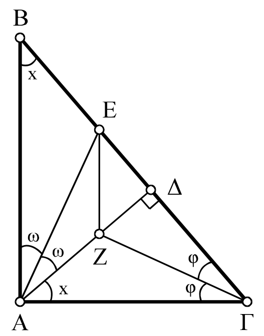
α) $\Gamma Z \perp AE$,

β) ΕΖ // ΑΒ.

Υπόδειξη

α) Οι γωνίες $\Delta\hat{A}B$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες ως συμπληρωματικές της $\hat{B}$. Έτσι έχουμε:

$$2\omega = 2\varphi \Leftrightarrow \omega = \varphi \qquad (1)$$



Όμοια είναι:

$$\hat{B} = \Delta\hat{A}\Gamma = x$$

Από το τρίγωνο ΑΔΒ παίρνουμε:

$$x + 2\omega = 90^o \Leftrightarrow x + \omega + \omega = 90^o \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x + \omega + \varphi = 90^o \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E\hat{A}\Gamma + Z\hat{\Gamma}A = 90^o \Leftrightarrow \Gamma Z \perp AE$$

β) Παρατηρούμε ότι στο τρίγωνο ΑΕΓ οι ΑΔ και ΓΖ είναι οι ευθείες δύο υψών. Έτσι το Ζ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, οπότε ισχύει $EZ \perp A\Gamma$. Επειδή ισχύει και $BA \perp A\Gamma$, θα είναι τελικά ΕΖ // ΑΒ.

Βιβλιογραφία :

Μπάμπης Στεργίου, Γεωμετρία για Διαγωνισμούς, Σαββάλας - 2010