ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}

ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Πρωταρχικές έννοιες

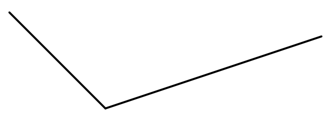
Όπως τα αντιλαμβανόμαστε : **Σημείο**, **Ευθεία** , **Επίπεδο.**

Αξιώματα

προτάσεις που τις αποδεχόμαστε χωρίς απόδειξη.
αξίωμα: Από δυο διαφορετικά σημεία του επιπέδου διέρχεται μοναδική ευθεία.
αξίωμα: Κάθε επίπεδο περιέχει τουλάχιστον τρία μη συνευθειακά σημεία.
αξίωμα: Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις χωρίς διακοπές και κενά.

Ευθύγραμμα τμήματα

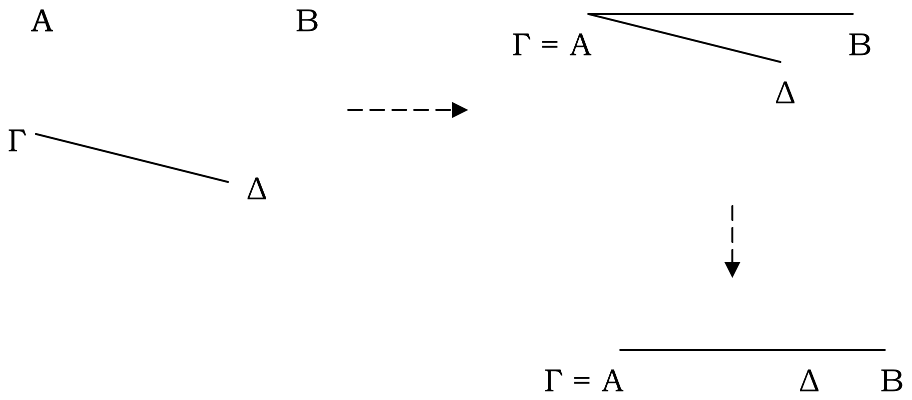
ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με άκρα Α, Β.
μηδενικό ευθύγραμμο τμήμα είναι ένα τμήμα της μορφής ΑΑ΄ (ίδια άκρα), δηλαδή ένα σημείο.
Δύο διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα είναι ευθύγραμμα τμήματα τα οποία έχουν κοινό ένα άκρο και κανένα άλλο σημείο.



Σχήμα 1 Διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα

Σύγκριση ευθυγράμμων τμημάτων

Για να συγκρίνουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα μετατοπίζουμε το ένα κατάλληλα ώστε το ένα άκρο του να ταυτιστεί με το άκρο του άλλου ευθυγράμμου τμήματος.



Άρα το ΓΔ είναι μικρότερο του ΑΒ.

Σχήμα 2 Σύγκριση ευθυγράμμων τμημάτων

Ίσα ευθύγραμμα τμήματα λέγονται εκείνα που με κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζονται και συμβολίζουμε : ΑΒ=ΓΔ.

αξίωμα : Κάθε επίπεδο σχήμα μπορεί να μετατοπισθεί μέσα στο επίπεδο από την αρχική του θέση σε οποιαδήποτε άλλη θέση και να παραμείνει αναλλοίωτο ως προς τη μορφή και το μέγεθος (Ομόλογα σχήματα).

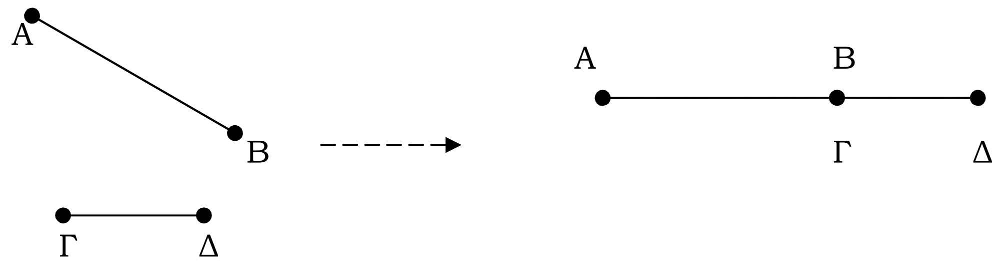
Κάθε σημείο Α μίας ευθείας xx' χωρίζει την ευθεία σε δύο μέρη το Αx και το Αx', τα οποία λέγονται ημιευθείες. Η ευθεία xx', η οποία περιέχει τις δύο ημιευθείες λέγεται φορέας τους. Οι ημιευθείες αυτές που έχουν τον ίδιο φορέα και κοινό σημείο μόνο την αρχή τους λέγονται αντικείμενες.

αξίωμα : Για κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και κάθε ημιευθεία Γx υπάρχει σημείο Δ εσωτερικό της ημιευθείας ώστε ΓΔ=ΑΒ.

Μέσο : χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα σε δυο ίσα μέρη.
αξίωμα : Κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει μοναδικό μέσο.
Έτσι το μέσο Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ έχει την ιδιότητα : ΑΜ=ΜΒ.

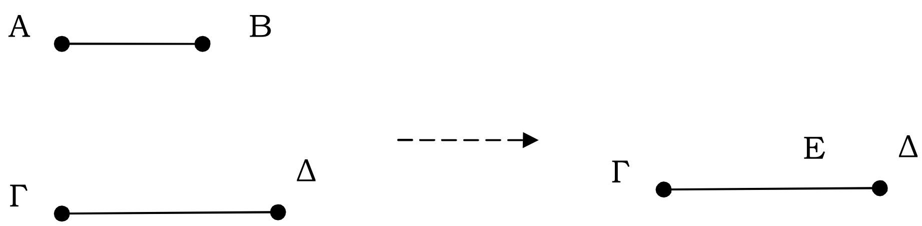
Πράξεις ευθυγράμμων τμημάτων

Άθροισμα: των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ και ΓΔ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που προκύπτει, αν τα μετατοπίσουμε ώστε να γίνουν διαδοχικά και να έχουν τον ίδιο φορέα.



Σχήμα 3 Πρόσθεση ευθυγράμμων τμημάτων

Διαφορά: Αν ΑΒ<ΓΔ τότε υπάρχει εσωτερικό σημείο Ε του ΓΔ, ώστε ΕΓ=ΑΒ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΔ λέγεται διαφορά του ΑΒ από το ΓΔ.



Σχήμα 4 Διαφορά ευθυγράμμων τμημάτων

Γινόμενο *αριθμού* ν με τμήμα ΑΒ λέγεται ένα νέο τμήμα που προκύπτει ως άθροισμα ν ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ.

Μήκος ή **μέτρο** ενός ευθυγράμμου τμήματος λέγεται ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές μεγαλύτερο ή μικρότερο είναι αυτό από τη **μονάδα**

<u>μήκους</u>, δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα με το οποίο συγκρίνουμε όλα τα υπόλοιπα. Το μήκος του ΑΒ το συμβολίζουμε με **(ΑΒ)**.
Οπότε :

Το άθροισμα δύο ευθυγράμμων τμημάτων έχει μήκος το άθροισμα των μηκών τους : (ΑΒ+ΓΔ) = (ΑΒ) + (ΓΔ).

Η διαφορά δύο ευθυγράμμων τμημάτων έχει μήκος τη διαφορά των μηκών τους : (ΑΒ-ΓΔ) = (ΑΒ) – (ΓΔ).

Το γινόμενο ενός αριθμού κ με ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει μήκος κ φορές το μήκος του ΑΒ : (κ ΑΒ) = κ (ΑΒ).

Παρατηρήσεις για τις ασκήσεις (Ευθύγραμμα τμήματα)

<u>ΓΕΝΙΚΟ ΣΧΟΛΙΟ :</u> Προσπαθούμε να καταλάβουμε και να λάβουμε υπόψη μας ΟΛΕΣ τις λέξεις με τις οποίες διατυπώνεται μία άσκηση. Κάθε λέξη μας δίνει και ένα επιπλέον στοιχείο για την επίλυση της άσκησης. Όποτε είναι εφικτό προσπαθούμε να μεταφράζουμε τα δεδομένα μας σε ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ.

1) Αν ζητηθεί να αποδείξετε ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων πρέπει να εκφράσετε το ένα σε σχέση με το άλλο (συνήθως το μεγαλύτερο)

2) Αν στην ισότητα υπάρχουν παραπάνω από δυο ευθύγραμμα τμήματα κάνω πράξεις μεταξύ τους. Βοηθάει να **τα σπάω σε όσο το δυνατόν μικρότερα τμήματα** και κάνω πράξεις.

3) Αν έχω **μέσο** Μ ενός τμήματος ΑΒ δεν ξεχνάω να αντικαταστήσω το ένα από τα δυο ευθύγραμμα τμήματα (ΑΜ ή ΜΒ) με το άλλο. Ειδικά αν έχω απομακρυσμένα ευθύγραμμα τμήματα και δεν μπορώ να τα προσθέσω.

Α Μ Β

4) <u>Προσοχή :</u> Στην περίπτωση που έχω συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ και δεν αναφέρεται η σειρά, παίρνω ΟΛΕΣ τις δυνατές διαφορετικές περιπτώσεις : πχ ημιευθεία με αρχή το σημείο Α περιέχει τα σημεία Β και Γ.

Α Β Γ   Α Γ Β

Γωνίες

Τρόποι συμβολισμού γωνίας

Γωνία $x\hat{O}y$: Η κορυφή Ο σημειώνεται στο μέσο

Γωνία $\hat{\omega}$: Συμβολισμός με μικρό γράμμα.

Γωνία $\hat{O}$: Συμβολισμός με την κορυφή.

Γωνία $A\hat{B}\Gamma$: Β η κορυφή της γωνίας και Α, Γ σημεία στις πλευρές της.

Είδη γωνιών

Ορθή λέμε την γωνία που οι πλευρές της τέμνονται κάθετα (=90^o).
Οξεία λέμε την γωνία που είναι μικρότερη από την ορθή (<90^o).
Αμβλεία λέμε την γωνία που είναι μεγαλύτερη από την ορθή (>90^o).
Ευθεία λέμε την γωνία που οι πλευρές της είναι αντικείμενες ημιευθείες.
Μηδενική λέμε την γωνία που οι πλευρές της ταυτίζονται.
Πλήρη λέμε την γωνία που καλύπτει όλο το επίπεδο.
Εφεξής λέμε τις γωνίες που έχουν κοινή κορυφή και μια πλευρά κοινή.
Άθροισμα δύο εφεξής γωνιών λέγεται η γωνία που έχει πλευρές τη μη κοινή πλευρά των δύο αυτών γωνιών.
Γινόμενο μίας γωνίας ω με έναν *αριθμό* κ ονομάζεται το άθροισμα κ διαδοχικών γωνιών ίσων με την ω.
Συμπληρωματικές λέμε τις γωνίες που έχουν άθροισμα 90^o (η συμπληρωματική μιας γωνίας $\hat{\omega}$ είναι η $\mathbf{90}^o$ **-** $\hat{\omega}$).
Παραπληρωματικές λέμε τις γωνίες που έχουν άθροισμα 180^o (η παραπληρωματική μιας γωνίας $\hat{\omega}$ είναι η $\mathbf{180}\perp$ **-** $\hat{\omega}$).
Διχοτόμος είναι μια ημιευθεία που χωρίζει την γωνία σε δυο μικρότερες ίσες γωνίες.

Αξίωμα : Κάθε γωνία έχει μοναδική διχοτόμο.

Θεώρημα : Σε κάθε σημείο μίας ευθείας άγεται μοναδική κάθετη σε αυτήν.
<u>Απόσταση σημείου από ευθεία</u> είναι το μήκος του μοναδικού κάθετου ευθυγράμμου τμήματος από το σημείο στην ευθεία.
<u>Μεσοκάθετος</u> ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη στο ΑΒ και διέρχεται από το μέσον του.

Θεωρήματα γωνιών

Θεώρημα : Δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες <u>και αντίστροφα.</u>

Θεώρημα : Οι διχοτόμοι δυο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών, τέμνονται κάθετα.

Θεώρημα : Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες

Θεώρημα : Η προέκταση της διχοτόμου μιας γωνίας, είναι διχοτόμος της κατακορυφήν της.

Παρατηρήσεις για τις ασκήσεις (Γωνίες)

1) Αν ζητηθεί να αποδείξετε ισότητα μεταξύ γωνιών πρέπει να εκφράσετε τη μια σε σχέση με την άλλη (συνήθως τη μεγαλύτερη).

2) Αν στην ισότητα υπάρχουν παραπάνω από δυο γωνίες κάνω πράξεις μεταξύ τους. Βοηθάει να **τα σπάω σε όσο το δυνατόν μικρότερες γωνίες** και κάνω πράξεις.

3) Προσοχή αν έχω διχοτόμο Οδ μιας γωνίας ΑΟΒ δεν ξεχνάω να αντικαταστήσω τη μια από τις ΑΟδ, ΒΟδ με την άλλη.

Κύκλος - Γωνίες και τόξα

Κύκλος (Ο, ρ): λέγεται το επίπεδο σχήμα του οποίου όλα τα σημεία απέχουν από το Ο απόσταση ίση με την ακτίνα.
ρ: ακτίνα , Ο: κέντρο

Γεωμετρικός τόπος: λέγεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου που έχουν μια χαρακτηριστική ιδιότητα.
Πχ. Για όλα τα σημεία του κύκλου που ισαπέχουν από το κέντρο ισχύει ΟΜ = ρ.

Στοιχεία του κύκλου

Τόξο: ονομάζεται κάθε τμήμα πάνω στον κύκλο που ορίζεται από δυο σημεία Α**.**
Χορδή: ονομάζεται κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του πάνω στον κύκλο.
Απόστημα ως προς μια χορδή λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα πάνω σ' αυτή από το κέντρο του κύκλου
Διάμετρος: ονομάζεται η χορδή που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου
Αντιδιαμετρικά σημεία: ονομάζονται τα άκρα μιας διαμέτρου.
Εσωτερικό σημείο: λέγεται κάθε σημείο για το οποίο ισχύει ΟΜ>ρ
Εξωτερικό σημείο: λέγεται κάθε σημείο για το οποίο ισχύει ΟΜ<ρ
Σημείο πάνω στον κύκλο: λέγεται κάθε σημείο για το οποίο ισχύει ΟΜ=ρ.
Ίσοι κύκλοι: ονομάζονται οι κύκλοι που έχουν ίσες ακτίνες
Επίκεντρη γωνία: λέγεται κάθε γωνία που έχει σαν κορυφή της το κέντρο του κύκλου.
Θεώρημα : Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, αν και μόνο αν οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες.

Τα τόξα άνισων κύκλων δεν είναι συγκρίσιμα (με τη μέθοδο της μετατόπισης).

Θεώρημα : Το μέσο ενός τόξου είναι μοναδικό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^0

ΤΡΙΓΩΝΑ

§ 3.1-3.6 Βασικά στοιχεία – Κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Κύρια στοιχεία τριγώνου είναι οι πλευρές **και οι** γωνίες**.**

Είδη τριγώνων

(Ως προς τις πλευρές)

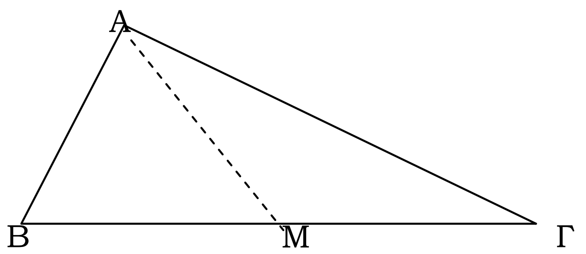
Σκαληνό λέγεται εκείνο που έχει όλες τις πλευρές του άνισες.
Ισοσκελές λέγεται ένα τρίγωνο, το οποίο έχει τις δύο πλευρές του ίσες.
Ισόπλευρο λέγεται ένα τρίγωνο, το οποίο έχει όλες τις πλευρές του ίσες μεταξύ τους.

Παρατήρηση : Όταν σε μία άσκηση δεν μας ζητούν συγκεκριμένο τύπο τριγώνου, τότε σχεδιάζουμε ένα σκαληνό τρίγωνο.

(Ως προς τις γωνίες)
Οξυγώνιο λέγεται ένα τρίγωνο το οποίο έχει όλες του τις γωνίες οξείες.
Ορθογώνιο λέγεται ένα τρίγωνο το οποίο έχει μία ορθή γωνία. Η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται **υποτείνουσα** του ορθογωνίου τριγώνου.
Αμβλυγώνιο λέγεται ένα τρίγωνο που έχει μία γωνία αμβλεία.

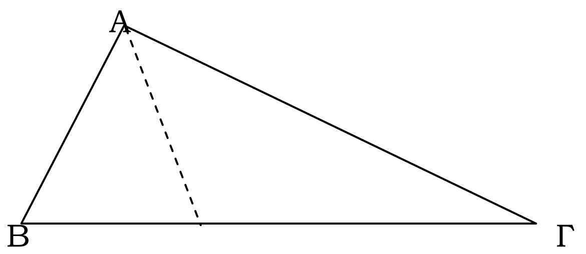
Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Διάμεσος ενός τριγώνου ονομάζεται ένα <u>ευθύγραμμο τμήμα</u> που ενώνει μια κορυφή ενός τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς**.**



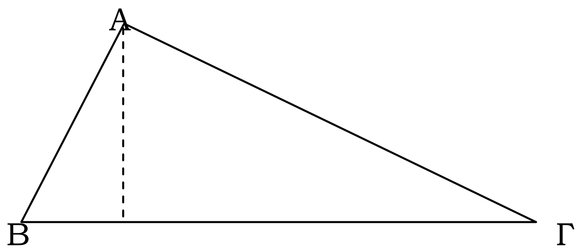
Σχήμα 5 : Η διακεκομμένη γραμμή είναι η διάμεσος του τριγώνου που αντιστοιχεί στην κορυφή Α και στην πλευρά ΒΓ.

Διχοτόμος μίας γωνίας ονομάζεται το <u>ευθύγραμμο τμήμα</u> που χωρίζει τη γωνία σε δυο ίσα μέρη**.**



Σχήμα 6 : Η διακεκομμένη γραμμή είναι η διχοτόμος της γωνίας Α και την χωρίζει σε δύο ίσα μέρη.

Ύψος ενός τριγώνου ονομάζεται το κάθετο <u>ευθύγραμμο τμήμα</u> που φέρνουμε από μια κορυφή ενός τριγώνου στην απέναντι πλευρά**.**



Σχήμα 7 : Η διακεκομμένη γραμμή είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην κορυφή Α και την πλευρά ΒΓ του τριγώνου.

Παρατήρηση : Είναι εμφανές ότι κάθε τρίγωνο διαθέτει τρεις διαμέσους, τρεις διχοτόμους και τρία ύψη.

Άλλα στοιχεία του τριγώνου

Περίμετρος ενός τριγώνου (ή ευθυγράμμου σχήματος γενικότερα) καλείται το άθροισμα των πλευρών του.
Κυρτό σχήμα ονομάζεται εκείνο του οποίου καθεμία από τις πλευρές του το αφήνουν στο ίδιο ημιεπίπεδο.

Ισότητα τριγώνων

Δυο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν τις πλευρές και τις γωνίες τους ίσες μια προς μια (**αντίστοιχες** ή **ομόλογες** πλευρές / γωνίες).

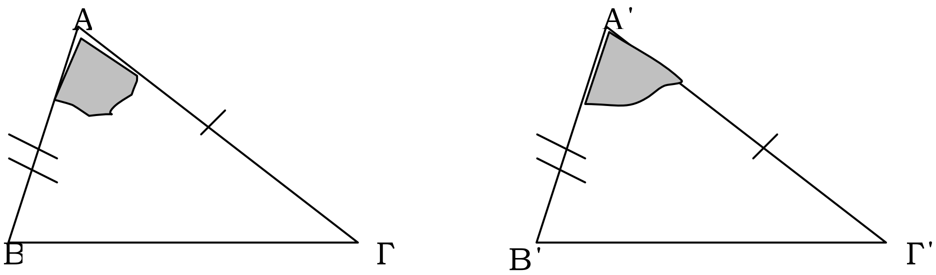
<u>Παρατήρηση</u> : Σε ίσα τρίγωνα ισχύει ότι απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Βέβαια καταλαβαίνουμε ότι για να μπορέσουμε να διαπιστώσουμε αν δύο τρίγωνα είναι ίσα δεν μπορούμε πάντα να μετακινούμε το ένα πάνω στο άλλο και να τα συγκρίνουμε, αλλά και η διαδικασία της μέτρησης και σύγκρισης όλων των πλευρών και των γωνιών είναι ιδιαίτερα κοπιαστική. Γι' αυτόν το λόγο για να συγκρίνουμε με λιγότερο κόπο δύο τρίγωνα θα χρησιμοποιήσουμε μεθόδους οι οποίες μας επιτρέπουν να αποφανθούμε αν δύο τρίγωνα είναι ίσα με λιγότερο κόπο. Τέτοιες μέθοδοι καλούνται **κριτήρια ισότητας** τριγώνων (και προφανώς παρόμοια κριτήρια και μέθοδοι υπάρχουν και σε άλλα αντικείμενα στις επιστήμες). Συνεπώς, η χρήση ενός κριτηρίου μας ωθεί να αποδείξουμε γρηγορότερα την ισχύ μίας ιδιότητας και στη συγκεκριμένη περίπτωση τα κριτήρια ισότητας τριγώνων μας βοηθούν στο να αποδείξουμε την ισότητα δύο τριγώνων.

1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΠΓΠ)

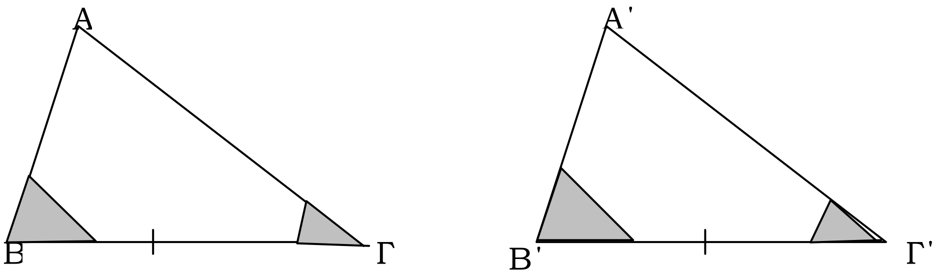
Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δυο πλευρές ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σ' αυτές γωνίες ίσες.



Σχήμα 8 : Εδώ έχουμε τις γωνίες Α=Ά και τις πλευρές : ΑΒ=ΆΒ΄ και ΑΓ = ΆΓ΄.

2ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΓΠΓ)

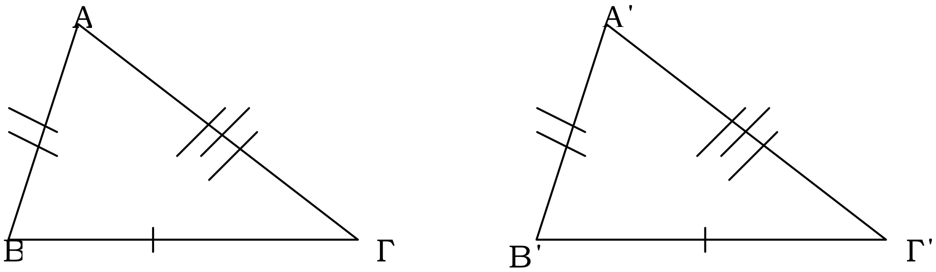
Δυο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μια προς μια.



Σχήμα 9 : Εδώ έχουμε τις γωνίες : Α=Ά, Γ=Γ΄, οι οποίες «πρόσκεινται» στις ίσες πλευρές : ΑΓ = ΆΓ΄.

3ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΠΠΠ)

Δυο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν τρεις πλευρές ίσες μία προς μία.



Σχήμα 10 : Εδώ έχουμε ίσες και τις τρεις πλευρές : ΒΓ = Β΄Γ΄, ΑΒ = ΆΒ΄ και ΑΓ = Ά΄Γ΄.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Θεώρημα (μοναδικότητας καθέτου από σημείο σε ευθεία)

Από ένα σημείο το οποίο δεν ανήκει σε δεδομένη ευθεία άγεται μοναδική κάθετος προς αυτήν την ευθεία.

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες και τα κριτήρια ισότητας τριγώνων στην ειδική περίπτωση του ορθογωνίου τριγώνου έχουμε τα εξής κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

1ο Κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (υποτείνουσα + οξεία)

Δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μια προς μια.

2ο Κριτήριο ισότητας ορθογ. τριγώνων (υποτείνουσα + κάθετη)

Δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά ίσες μια προς μια.

Πρώτες εφαρμογές ισότητας τριγώνων.

Θα δούμε στη συνέχεια ότι η χρήση της σύγκρισης των τριγώνων είναι βασική διαδικασία στη γεωμετρία, με την οποία επιτυγχάνουμε την απόδειξη της ισότητας, όχι μόνον τριγώνων, αλλά και ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών ή ακόμα και άλλων ευθυγράμμων σχημάτων.

Παρατήρηση : Η βασική ιδέα για τη χρήση της σύγκρισης των τριγώνων σε όλες αυτές τις περιπτώσεις είναι να εντοπίσουμε κατάλληλα τρίγωνα (τα οποία μας φαίνονται τουλάχιστον ίσα) που περιέχουν τα προς σύγκριση στοιχεία.

Παρακάτω βλέπουμε δύο παραδείγματα τέτοιας χρήσης.

Θεώρημα Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες ανν (αν και μόνο αν) τα αποστήματα τους είναι ίσα.

Θεώρημα Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

Παρατηρήσεις για τις ασκήσεις (Ισότητα τριγώνων)

1) Για να αποδείξουμε ότι δυο πλευρές ή ότι δυο γωνίες είναι ίσες βρίσκουμε δυο τρίγωνα που τις περιέχουν και αποδεικνύουμε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα. Στη συνέχεια βγάζουμε το ζητούμενο αφού ξέρουμε ότι σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
2) Προσοχή όταν έχω σαν δεδομένο ότι δυο τρίγωνα είναι ίσα, ξέρω ότι όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες είναι ίσες μια προς μια και το σημειώνω στο σχήμα μου.

3) Όταν δίνεται η διάμεσος ενός τριγώνου, συχνά εξυπηρετεί να προεκτείνουμε αυτήν κατά τμήμα ίσο με αυτήν, οπότε δημιουργούνται δύο ίσα τρίγωνα.

§ 3.7 – 3.9 Γεωμετρικοί τόποι .

Γεωμετρικός τόπος ονομάζεται ένα σύνολο σημείων (του επιπέδου), τα οποία έχουν μία κοινή ιδιότητα και δεν υπάρχουν άλλα εκτός από αυτά με αυτήν την ιδιότητα.

Κύκλος ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, τα οποία έχουν την ιδιότητα να απέχουν σταθερή δεδομένη απόσταση ρ(**ακτίνα του κύκλου**) από ένα σταθερό δοσμένο σημείο (**κέντρο του κύκλου**).

Μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος.

Διχοτόμος μίας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, τα οποία ισαπέχουν από τις πλευρές της.

Νοηματική σύλληψη ενός γεωμετρικού τόπου

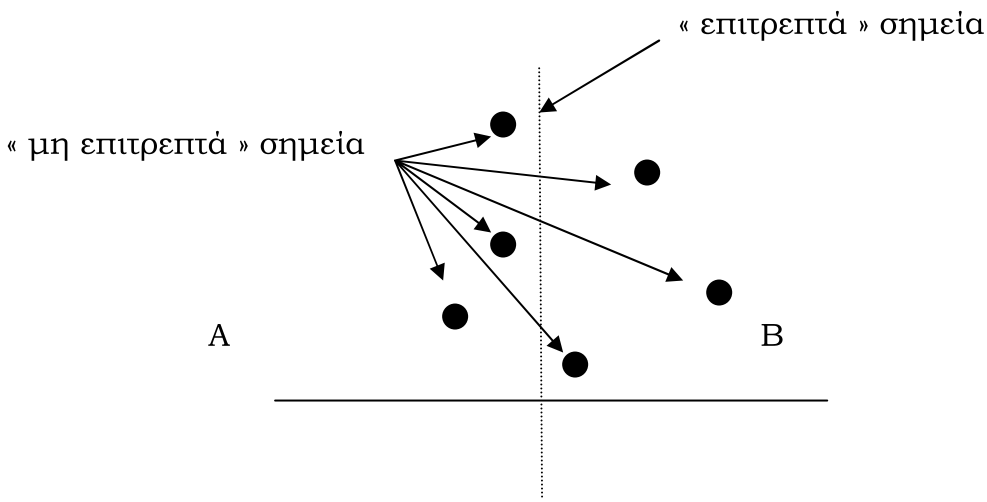
Για να μπορέσουμε να κατανοήσουμε την ιδέα του γεωμετρικού τόπου και να προσδιορίσουμε τη μορφή αυτού μία μέθοδος σκέψης είναι η εξής :
Σκεφτόμαστε τον εαυτό μας σαν ένα σημείο του επιπέδου και προσπαθούμε να κινηθούμε σε αυτό το επίπεδο, δεχόμενοι τους κανόνες (δηλαδή την ιδιότητα) που μας δίνουν.

Αυτή η κίνησή μας στο επίπεδο θα μας δώσει ένα ή περισσότερα σημεία στο επίπεδο. Η συλλογή αυτών των σημείων είναι ακριβώς και ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.

Παράδειγμα (η μεσοκάθετος).

Χαρακτηριστική ιδιότητα : τα σημεία που ισαπέχουν από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος.

Φανταζόμαστε, λοιπόν, ότι κινούμαστε πάνω στο επίπεδο με τον παραπάνω κανόνα. Που θα μπορούσαμε να πάμε (βλ. σχήμα);



Σχήμα 11: Εδώ για το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ η μεσοκάθετος είναι η διάστικτη ευθεία. Οι μεγάλες τελείες είναι μη επιτρεπτά σημεία «κίνησης», σύμφωνα με τους κανόνες που μας έχουν δοθεί.

Παρατηρήσεις για τις ασκήσεις (γεωμετρικοί τόποι)

Για να προσδιορίσουμε και να αποδείξουμε ότι ένα σχήμα είναι ο γ.τ. των σημείων με μία συγκεκριμένη ιδιότητα εργαζόμαστε στα εξής βήματα :
1) Θεωρούμε ένα σημείο Μ του ζητούμενου γ.τ. και με βάση την ιδιότητα, η οποία μας δίνεται προσδιορίζουμε το σχήμα στο οποίο βρίσκεται.
2) Αποδεικνύουμε ότι κάθε σημείο με τη συγκεκριμένη ιδιότητα ανήκει στο σχήμα αυτό και
3) Κάθε σημείο του σχήματος αυτού έχει τη συγκεκριμένη ιδιότητα.

§ 3.10 – 3.13 Ανισοτικές σχέσεις.

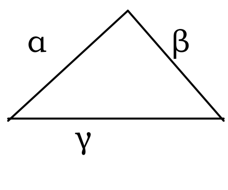
Θεώρημα Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

Θεώρημα Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.

Θεώρημα Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

Τριγωνική ανισότητα

i) $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$
ii) $\beta - \alpha < \gamma < \beta + \alpha$
iii) $\alpha - \gamma < \beta < \alpha + \gamma$



Παρατήρηση : Πρακτικά το πρώτο μέρος της τριγωνικής ιδιότητας μας λέει ότι ο συντομότερος τρόπος για να μεταβώ από ένα σημείο σε ένα άλλο είναι η ευθεία και όχι η τεθλασμένη δια μέσω άλλου σημείου δηλαδή. Επίσης, κάθε τριάδα αριθμών αποτελούν μήκη πλευρών τριγώνου αν και μόνο αν ικανοποιούν μία από τις παραπάνω μορφές της τριγωνικής ανισότητας.

Θεώρημα Αν δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου και αντίστροφα.

Θεώρημα Αν από ένα σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο τμήμα και δύο πλάγια τμήματα προς αυτήν , τότε το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο. Ακόμα, αν δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα, τότε και οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου είναι ομοίως άνισες και αντίστροφα.

Παρατηρήσεις για τις ασκήσεις (ανισοτικές σχέσεις)

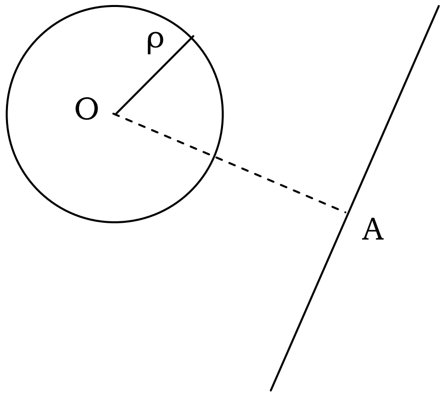
1) Προσδιορίζουμε αν δεδομένα ευθύγραμμα τμήματα μπορούν να σχηματίσουν τρίγωνο, ελέγχοντας αν τα μήκη τους ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα για κάθε πλευρά.
2) Σε κάθε περίπτωση αν μας ζητηθεί να αποδείξουμε μία ανίσωση με ευθύγραμμα τμήματα, προσπαθούμε το μικρότερο μέλος της ανίσωσης να το δούμε ως το ένα μέλος της τριγωνικής ανισότητας.
3) Αν τρία σημεία Κ, Λ, Μ του επιπέδου δεν είναι συνευθειακά, τότε σχηματίζεται τρίγωνο και άρα θα ισχύει η τριγωνική ανισότητα για κάθε πλευρά αυτού του τριγώνου.
4) Για να αποδείξουμε ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα, αρκεί να δείξουμε ότι είναι πλευρές τριγώνου με άνισες τις απέναντι γωνίες.
5) Κάθε ύψος ενός τριγώνου είναι μικρότερο από τις προσκείμενες πλευρές του τριγώνου (διότι είναι κάθετο τμήμα στην άλλη πλευρά).

§ 3.14-3.16 Εφαρμογές στον κύκλο.

Σχετικές θέσεις ευθείας κύκλου

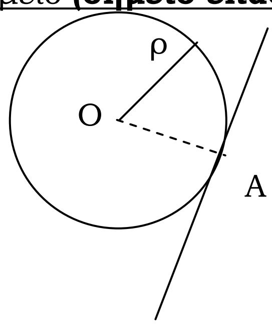
Θεωρούμε κύκλο (Ο,ρ) (Ο: κέντρο του κύκλου, ρ : ακτίνα του κύκλου), τότε :

1) Αν **ΟΑ > ρ** (η απόσταση της ευθείας από το κέντρο του κύκλου είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα) τότε η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.



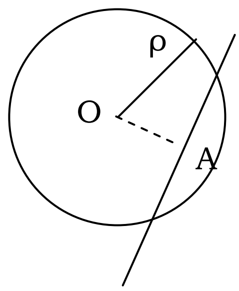
Σχήμα 12 : Η διακεκομμένη γραμμή είναι η απόσταση της ευθείας από το κέντρο O του κύκλου και μεγαλύτερη από την ακτίνα του.

2) Αν **OA = ρ** (η απόσταση της ευθείας από το κέντρο του κύκλου είναι ίση με την ακτίνα) τότε <u>η ευθεία και ο κύκλος έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο **(σημείο επαφής)**</u>.



Σχήμα 13 : Η διακεκομμένη γραμμή είναι η απόσταση της ευθείας από το κέντρο O του κύκλου και είναι ίση με την ακτίνα του.

3) Αν **OA < ρ** (η απόσταση της ευθείας από το κέντρο του κύκλου είναι μικρότερη από την ακτίνα) τότε <u>η ευθεία και ο κύκλος έχουν δυο κοινά σημεία.</u>



Σχήμα 14 : Η διακεκομμένη γραμμή είναι η απόσταση της ευθείας από το κέντρο του κύκλου και είναι μικρότερη της ακτίνας του κύκλου.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι :
Θεώρημα : Μία ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο σημεία.

Θεώρημα : Τα εφαπτόμενα ευθύγραμμα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός του κύκλου είναι ίσα AB=AΓ

Πόρισμα : Η διακεντρική ευθεία ενός σημείου και ενός κύκλου είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής με τα εφαπτόμενα τμήματα.

Πόρισμα : Η διακεντρκή ευθεία ενός σημείου και ενός κύκλου είναι διχοτόμος της γωνίας των εφαπτόμενων τμημάτων.

Σχετικές θέσεις δυο κύκλων

Διάκεντρος (δ) ή **διακεντρική ευθεία** ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που έχει για άκρα του τα κέντρα δυο κύκλων.

Οι κύκλοι **τέμνονται** τότε $|R-\rho| < \delta < R + \rho$.

Οι κύκλοι δεν τέμνονται :

α) εσωτερικός ο ένας κύκλος στον άλλο $\boldsymbol{\delta < |R-\rho|}$.

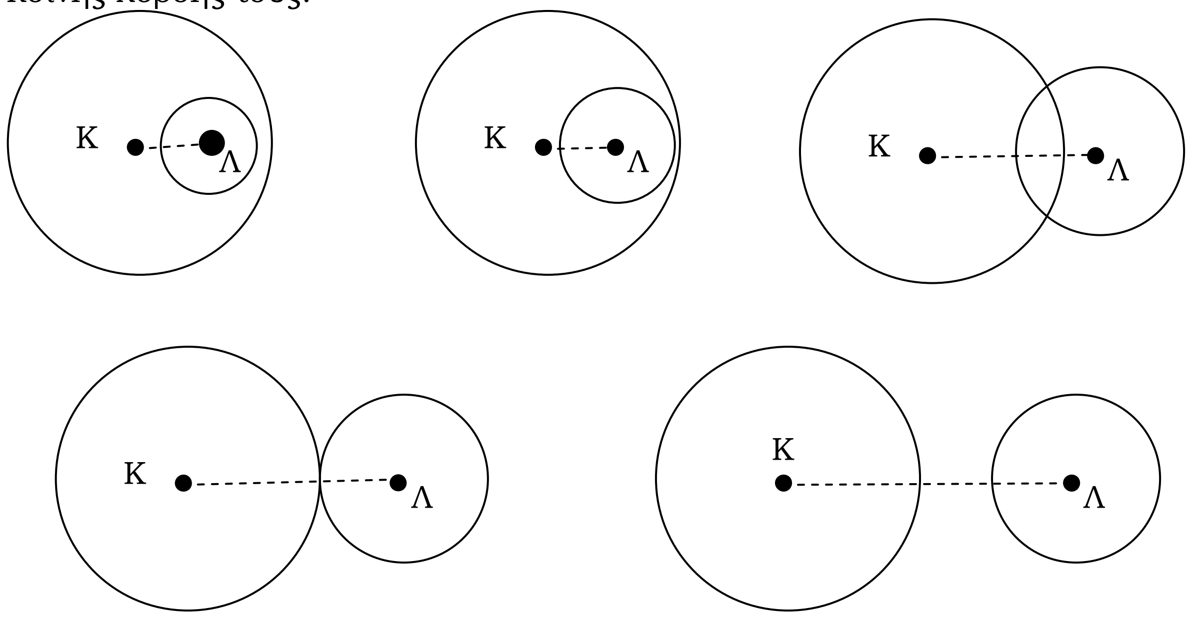
β) εξωτερικός ο ένας κύκλος στον άλλο $\boldsymbol{\delta > R + \rho}$.

Οι κύκλοι **εφάπτονται** :

α) εσωτερικά $\delta = |R-\rho|$.

β) εξωτερικά $\boldsymbol{\delta = R + \rho}$.

Θεώρημα : Η διάκεντρος δυο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.



Σχήμα 15 : Οι δυνατές διαδοχικές θέσεις δύο κύκλων καθώς η διακεντρική ευθεία ΚΛ μεγαλώνει.

Παρατηρήσεις για τις ασκήσεις (Σχετικές θέσεις ευθείας κύκλου, Σχετικές θέσεις δυο κύκλων)

1) Για να αποδείξουμε ότι μια ευθεία εφάπτεται σε ένα σημείο ενός κύκλου προσπαθούμε να δείξουμε ότι η ακτίνα σε αυτό το σημείο είναι κάθετη στην ευθεία.

2) Η διάκεντρος δύο εφαπτόμενων κύκλων είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους.

3) Όταν έχουμε δύο κύκλους συχνά εξυπηρετεί να φέρουμε την κοινή εφαπτομένη τους ή την κοινή χορδή τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^0

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

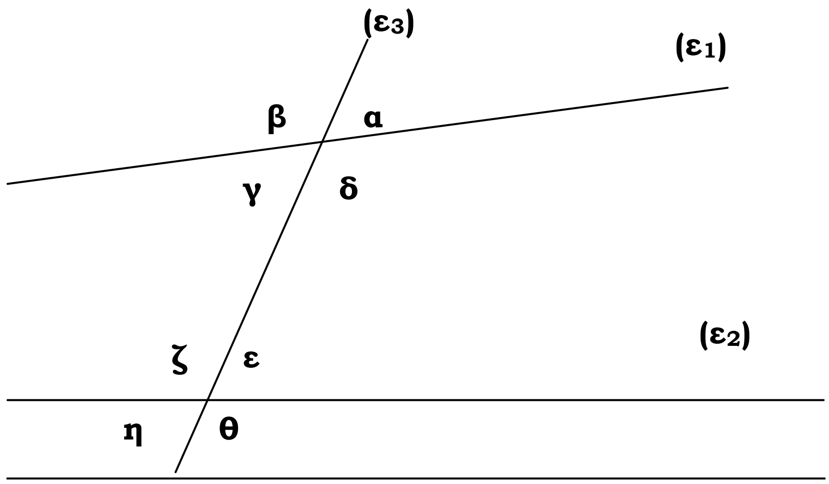
§ 4.1 - 4.2 Τέμνουσα δύο ευθειών – Ευκλείδειο αίτημα

Σχετικές θέσεις ευθειών

- ταυτίζονται
- τέμνονται
- είναι παράλληλες (δεν τέμνονται)

Τέμνουσα δύο ευθειών

Ας θεωρήσουμε δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$, τον επιπέδου, οι οποίες τέμνονται από τρίτη ευθεία $ε_3$. Παρατηρούμε ότι σχηματίζονται οκτώ γωνίες.
Οι γωνίες γ, δ, ε, ζ που βρίσκονται μεταξύ των $ε_1$, $ε_2$ λέγονται **'εντός'** ενώ οι γωνίες α, β, η, θ λέγονται **'εκτός'**. Δύο γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας $ε_3$ λέγονται **'επί τα αυτά μέρη'** ενώ δύο γωνίες που βρίσκονται εκατέρωθεν της $ε_3$ λέγονται **'εναλλάξ'**.
Έτσι, με συνδυασμό και των δύο χαρακτηρισμών, οι γωνίες ε και γ λέγονται **'εντός εναλλάξ '**, οι γωνίες ε και α λέγονται **'εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη'** ενώ οι γωνίες ε και δ λέγονται **'εντός και επί τα αυτά μέρη'.**



Σχήμα 16 : Οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται και η $ε_3$ είναι μία τέμνουσα αυτών.

Θεώρημα : (κριτήριο παραλληλίας) Αν δυο ευθείες τεμνόμενες από μια τρίτη σχηματίζουν δυο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες τότε είναι **<u>παράλληλες</u>** .

Πόρισμα : Αν δυο ευθείες τεμνόμενες από μια τρίτη σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες, τότε είναι **<u>παράλληλες</u>**.

Πόρισμα : Αν δυο ευθείες τεμνόμενες από μια τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές, τότε είναι **παράλληλες**.

Ευκλείδειο αίτημα

Το ευκλείδειο αίτημα είναι ένα από τα αξιώματα που έθεσε ο Ευκλείδης στα «Στοιχεία» του και είναι αυτό που καθόρισε τη μορφή της επίπεδης γεωμετρίας. Η αντικατάστασή του από άλλα αξιώματα οδήγησε στην ανάπτυξη άλλων γεωμετριών, οι οποίες έχουν επίσης πολλές εφαρμογές (πχ σφαιρική γεωμετρία στην ναυτιλία).

Αίτημα παραλληλίας

Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μοναδική παράλληλη προς αυτήν την ευθεία.

Ιδιότητες παραλλήλων ευθειών

Οι ιδιότητες ενός σχήματος ή μίας κατάστασης είναι τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη γνώση ύπαρξης της κατάστασης αυτής. Παρακάτω αναφέρουμε τις ιδιότητες που προκύπτουν από τη σχέση παραλληλίας ευθειών.

Πρόταση : Δύο παράλληλες ευθείες, οι οποίες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.
Πόρισμα : Δύο παράλληλες ευθείες, οι οποίες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες και τις εντός και επί τα αυτά μέρη παραπληρωματικές.

Πρόταση (μεταβατική ιδιότητα) : Αν δυο ευθείες είναι παράλληλες σε μια τρίτη τότε είναι παράλληλες και μεταξύ τους.

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_3 \text{ και } \varepsilon_2 // \varepsilon_3 \text{ τότε } \varepsilon_1 // \varepsilon_2.$$

Πόρισμα : Αν δυο ευθείες είναι κάθετες σε μια τρίτη τότε είναι παράλληλες μεταξύ τους :

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_3 \text{ και } \varepsilon_2 \perp \varepsilon_3 \text{ τότε } \varepsilon_1 // \varepsilon_2..$$

Πρόταση : Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία τέμνει τη μία από αυτές, τότε θα τέμνει και την άλλη.

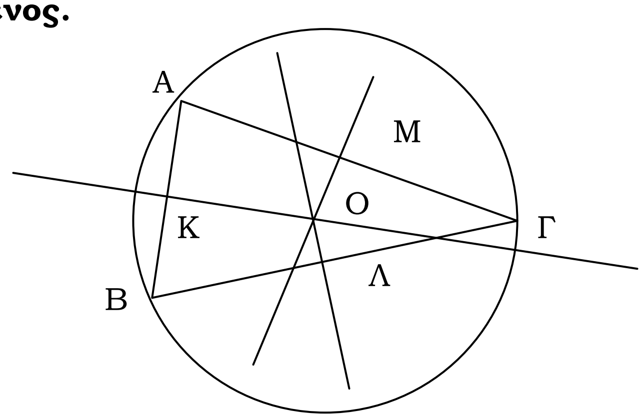
Πρόταση : (κριτήριο τεμνόμενων ευθειών) Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από Τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο των δύο ορθών, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται αυτές οι γωνίες.

§ 4.3 - 4.5 Γωνίες με παράλληλες πλευρές – κύκλοι τριγώνου

Δύο γωνίες με παράλληλες πλευρές μία προς μία αν είναι <u>και οι δύο</u> οξείες ή αμβλείες, τότε θα είναι ίσες μεταξύ τους.

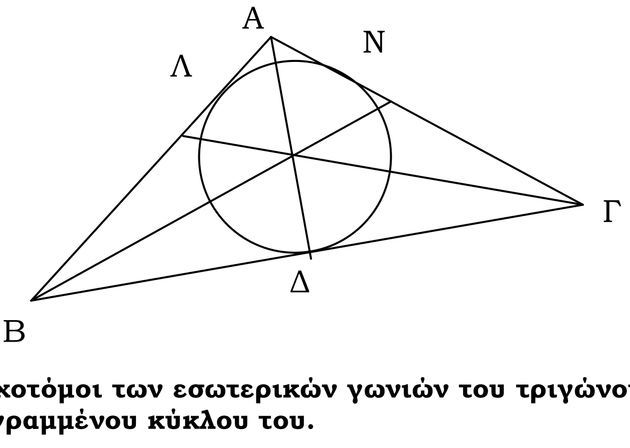
Δύο γωνίες με παράλληλες πλευρές μία προς μία, αν η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία, τότε είναι παραπληρωματικές.

Θεώρημα : Οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου. **(Ο περίκεντρο)**. Ο κύκλος αυτός καλείται **περιγεγραμμένος.**



Σχήμα 17 : Οι μεσοκάθετοι ενός τριγώνου συντρέχουν στο κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου αυτού.

Θεώρημα : Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλο που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου. **(Ι έγκεντρο)**. Ο κύκλος αυτός καλείται **εγγεγραμμένος.**



Σχήμα 18 : Οι διχοτόμοι των εσωτερικών γωνιών του τριγώνου συντρέχουν στο κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του.

Εφαρμογή : Αν θεωρήσουμε δύο εξωτερικές διχοτόμους και μία εσωτερική διχοτόμο ενός τριγώνου, τότε αυτές συντρέχουν σε ένα σημείο το οποίο καλείται **παράκεντρο** του τριγώνου και το οποίο είναι κέντρο κύκλου, ο οποίος εφάπτεται στη μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων και λέγεται **παραγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου.

Παρατηρήσεις για τις ασκήσεις στις παράλληλες

1) Αν μου ζητήσουν να αποδείξω ότι δυο ευθείες είναι παράλληλες τότε εντοπίζω μια τέμνουσα αυτών των δυο και προσπαθώ να βρω ίσες γωνίες (εντός εναλλάξ, εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη ή εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές). Σε κάθε περίπτωση γράφω πάντα τόσο τις παράλληλες όσο και την τέμνουσα. Μεγάλη προσοχή απαιτείται όταν έχουμε περισσότερες από μία τέμνουσες.

2) Ευθείες κάθετες σε μια τρίτη ευθεία είναι παράλληλες μεταξύ τους.

3) Για να εντοπίσουμε ποιο εύκολα τις γωνίες, προσδιορίζω τις παράλληλες και την τέμνουσα και κάθε φορά πέρνω μια γωνία από τον ένα κόμβο με μια από τον άλλο.

4) Αν γνωρίζουμε μία από τις 8 γωνίες που σχηματίζονται από δύο παράλληλες και μία τέμνουσα, τότε μπορούμε να βρούμε και τις υπόλοιπες.

5) Αν υπάρχουν γωνίες οι οποίες δεν μπορούν άμεσα να συσχετισθούν μεταξύ τους μέσω παραλλήλων, αλλά έχουμε γνωστή κάποια σχέση με μία τρίτη κοινή γωνία, τότε φέρουμε μία κατάλληλη βοηθητική παράλληλη, η οποία να μπορεί να μας δώσει σχέση για όλες τις γωνίες μεταξύ τους.

§ 4.6 - 4.7 Άθροισμα γωνιών τριγώνου – γωνίες με κάθετες πλευρές

Θεώρημα : Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι δύο ορθές.

Πόρισμα : Κάθε εξωτερική γωνία του τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

Θεώρημα : Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες. (ω=φ).

Πόρισμα : Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού ν-γώνου είναι 2ν-4 ορθές.
Πόρισμα : Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ω-γώνου είναι 4 ορθές.

Παρατηρήσεις για τις ασκήσεις

1) Όταν μας δίνεται το μέτρο μίας ή περισσοτέρων γωνιών τότε χρησιμοποιούμε τη σχέση του αθροίσματος των γωνιών του σχήματος : δύο ορθές για τρίγωνα, τρεις ορθές για τετράπλευρα.
2) Αν δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ή θέλουμε να δείξουμε ότι έχουμε ορθογώνιο τρίγωνο, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι οι υπόλοιπες δύο γωνίες θα έχουν άθροισμα 90 μοίρες.
3) Σε τρίγωνα δεν ξεχνάμε να εναλλάσσουμε τις σχέσεις από ισότητα γωνιών σε ισότητα πλευρών και αντίστροφα όπου χρειάζεται.

4) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι : $\hat{A} = 2\hat{\Gamma}$, τότε είτε φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Α, οπότε σχηματίζεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ, είτε φέρουμε το ύψος ΑΔ και θεωρούμε τμήμα ΔΕ = ΒΔ στη ΒΓ, οπότε δημιουργούνται δύο ισοσκελή τρίγωνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{Ο}

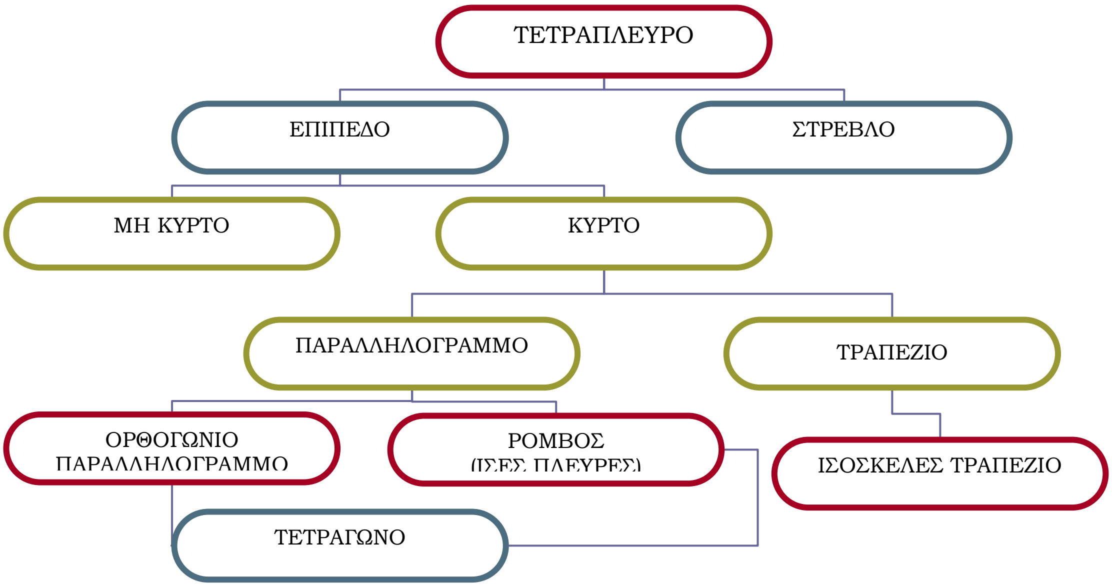
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ – ΤΡΑΠΕΖΙΑ

§ 5.1 – 5.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

Ορισμός : **Τετράπλευρο** ονομάζεται κάθε ευθύγραμμο σχήμα με τέσσερεις πλευρές. Ένα τετράπλευρο ονομάζεται **κυρτό**, αν κάθε πλευρά του το αφήνει στο ολόκληρο στο ίδιο ημιεπίπεδο. Ένα τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες καλείται **παραλληλόγραμμο.**

Παρατηρήσεις για τις ασκήσεις

1. Απόδειξη ισότητας πλευρών ενός τετραπλεύρου:
    a. Χρησιμοποιώ ίσα τρίγωνα.
    b. Χρησιμοποιώ ισοσκελή τρίγωνα.
        i. Μπορώ να δείξω ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, χρησιμοποιώντας ισότητες γωνιών, είτε μέσω ίσων τριγώνων, είτε :
        ii. Μέσω παραλλήλων.
        iii. Μέσω κατακορυφήν γωνιών.
        iv. Παραπληρωματικές γωνίες.
        v. Συμπληρωματικές γωνίες, όπως έγινε χρήση όλων αυτών στα προηγούμενα.
        vi. Απέναντι γωνίες δεδομένου παραλληλογράμμου.
    c. Χρησιμοποιώ ιδιότητες ενός άλλου τετραπλεύρου για το οποίο ήδη γνωρίζω ότι είναι παραλληλόγραμμο.
2. Απόδειξη παραλληλίας πλευρών τετραπλεύρου :
    a. Χρησιμοποιώ ιδιότητες ενός άλλου τετραπλεύρου για το οποίο έχω δεδομένο ότι είναι παραλληλόγραμμο.
    b. Χρησιμοποιώ ισότητες γωνιών εντός εναλλάξ, εντός εκτός και επί τ' αυτά, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.
3. Απόδειξη ισότητας γωνιών τετραπλεύρου : όπου χρησιμοποιώ κάποια από τις τεχνικές που περιγράφονται παραπάνω.
4. Αν δίνεται ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο γράφω πάντα όλες τις σχέσεις που προκύπτουν από τις ιδιότητές του.
5. Αν ζητείται να αποδείξω ότι κάποιες ευθείες συντρέχουν (δηλαδή διέρχονται από το ίδιο σημείο), τότε χρησιμοποιώ την ιδιότητα που έχει το κέντρο του παραλληλογράμμου από το οποίο διέρχονται οι διαγώνιοι αυτού.


ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ
ΕΠΙΠΕΔΟ
ΣΤΡΕΒΛΟ
ΜΗ ΚΥΡΤΟ
ΚΥΡΤΟ
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ
ΤΡΑΠΕΖΙΟ
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ
ΡΟΜΒΟΣ (ΙΣΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ)
ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟ
ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

ΕΙΔΟΣ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ	**ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ**	**ΚΡΙΤΗΡΙΑ**
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ	ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΠΛΕΥΡΕΣ ΙΣΕΣ	**ΔΥΟ ΖΕΥΓΗ** ΙΣΩΝ ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΠΛΕΥΡΩΝ
	ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΓΩΝΙΕΣ ΙΣΕΣ	**ΔΥΟ ΖΕΥΓΗ** ΙΣΩΝ ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΓΩΝΙΩΝ
	ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥΝΤΑΙ	ΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΤΟΥ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥΝΤΑΙ
		ΔΥΟ ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΠΛΕΥΡΕΣ ΙΣΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ	ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ ΜΕ ΟΡΘΗ ΓΩΝΙΑ	ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ ΜΕ ΜΙΑ ΓΩΝΙΑ ΟΡΘΗ
	ΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΤΟΥ ΕΙΝΑΙ ΙΣΕΣ	ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ ΜΕ ΙΣΕΣ ΔΙΑΓΩΝΙΟΥΣ
		ΤΡΕΙΣ ΓΩΝΙΕΣ ΟΡΘΕΣ
		ΟΛΕΣ ΟΙ ΓΩΝΙΕΣ ΤΟΥ ΕΙΝΑΙ ΙΣΕΣ
ΡΟΜΒΟΣ	ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ ΜΕ ΔΥΟ ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΙΣΕΣ	ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ ΚΑΙ ΔΥΟ ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΟΥ ΙΣΕΣ
	ΟΛΕΣ ΟΙ ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΟΥ ΕΙΝΑΙ ΙΣΕΣ	ΕΧΕΙ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΟΥ ΙΣΕΣ
	ΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΤΟΥ ΤΕΜΝΟΝΤΑΙ ΚΑΘΕΤΑ	ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ ΚΑΙ ΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΤΟΥ ΤΕΜΝΟΝΤΑΙ ΚΑΘΕΤΑ
	ΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΤΟΥ ΡΟΜΒΟΥ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥΝ ΤΙΣ ΓΩΝΙΕΣ ΤΟΥ	ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ ΚΑΙ ΜΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΟΣ ΔΙΧΟΤΟΜΕΙ ΜΙΑ ΓΩΝΙΑ ΤΟΥ
ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ	ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ + ΡΟΜΒΟΣ	ΔΕΙΧΝΩ ΟΤΙ ΕΙΝΑΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΚΑΙ ΡΟΜΒΟΣ
	ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΠΛΕΥΡΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ	ΟΡΘΗ ΓΩΝΙΑ + ΔΥΟ ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΙΣΕΣ
	ΟΛΕΣ ΟΙ ΠΛΕΥΡΕΣ ΙΣΕΣ	ΟΡΘΗ ΓΩΝΙΑ + ΔΙΑΓΩΝΙΟΣ ΔΙΧΟΤΟΜΕΙ ΜΙΑ ΓΩΝΙΑ
	ΟΛΕΣ ΟΙ ΓΩΝΙΕΣ ΟΡΘΕΣ	ΟΡΘΗ ΓΩΝΙΑ + ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΚΑΘΕΤΕΣ
	ΔΙΑΓΩΝΙΕΣ ΙΣΕΣ	ΔΙΑΓΩΝΙΕΣ ΙΣΕΣ + ΔΥΟ ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΙΣΕΣ
	ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΚΑΘΕΤΕΣ	ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΙΣΕΣ ΚΑΙ Η ΜΙΑ ΔΙΧΟΤΟΜΕΙ ΜΙΑ ΓΩΝΙΑ
	ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥΝΤΑΙ	ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΙΣΕΣ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΕΣ
	ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥΝ ΓΩΝΙΕΣ	
ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟ	ΟΙ ΠΡΟΣΚΕΙΜΕΝΕΣ ΣΤΗ ΒΑΣΗ ΓΩΝΙΕΣ ΕΙΝΑΙ ΙΣΕΣ	ΤΡΑΠΕΖΙΟ ΚΑΙ ΟΙ ΓΩΝΙΕΣ ΠΟΥ ΠΡΟΣΚΕΙΝΤΑΙ ΣΤΗ ΜΙΑ ΒΑΣΗ ΕΙΝΑΙ ΙΣΕΣ
	ΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΤΟΥ ΕΙΝΑΙ ΙΣΕΣ	ΤΡΑΠΕΖΙΟ ΠΟΥ ΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΤΟΥ ΕΙΝΑΙ ΙΣΕΣ

Παρατηρήσεις για τις ασκήσεις

6. Όταν μου δίνουν (=ιδιότητες) ένα παραλληλόγραμμο σημειώνω όλα τα στοιχεία που γνωρίζω.
7. Αν θέλω να αποδείξω (=κριτήρια) ότι κάποιο τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, ρόμβος ή τετράγωνο ανάλογα τι στοιχεία έχω χρησιμοποιώ τα κριτήρια:
    a. για τις διαγώνιους.
    b. για τις πλευρές (ίσα τρίγωνα, ισοσκελή).
    c. για τις γωνίες (ισοσκελή, παράλληλες, κατακορυφήν, παραπληρωματικές, συμπληρωματικές, ίσα τρίγωνα).
8. Δείτε και μεθοδολογία προηγούμενης παραγράφου.

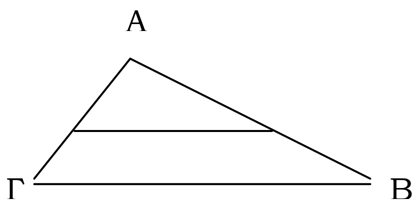
§5.6 – 5.9 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

Θεώρημα 1

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίση με το μισό της.

$$\boxed{\Delta E = // \frac{B\Gamma}{2}}$$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ : Το θεώρημα αυτό αποτελεί ένα πολύ καλό κριτήριο παραλληλίας, αλλά σημαντική **ιδιότητα των μέσων** ενός τριγώνου.

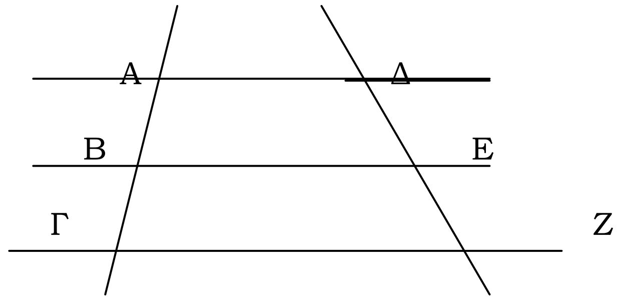
Θεώρημα 2

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Θεώρημα 3

Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μια ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη.

Αν ΑΒ =ΒΓ
τότε
ΔΕ=ΕΖ



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ : Το προηγούμενο θεώρημα αποτελεί μία ειδική περίπτωση του πολύ γνωστού θεωρήματος του Θαλή, το οποίο θα εξετάσουμε παρακάτω και το χρησιμοποιούμε <u>για να χωρίζουμε ευθύγραμμα τμήματα σε ίσα τμήματα.</u>

Ο **γεωμετρικός τόπος** των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$, η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δύο παράλληλες λέγεται **μεσοπαράλληλος** (η ευθεία ε) των $ε_1$και $ε_2$.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΣΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

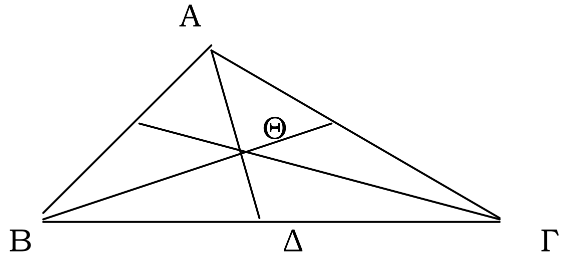
Βαρύκεντρο τριγώνου

<u>Θεώρημα</u>

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου **διέρχονται από το ίδιο σημείο** του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

(Το Θ στο οποίο τέμνονται οι διάμεσοι ονομάζεται βαρύκεντρο του τριγώνου)

$$ΑΘ=\frac{2}{3}ΑΔ$$



Ορθόκεντρο τριγώνου

<u>Λήμμα</u>

Οι παράλληλες ευθείες που άγονται από τις κορυφές ενός τριγώνου προς τις απέναντι πλευρές του, σχηματίζουν τρίγωνο, το οποίο έχει ως μέσα των πλευρών του τις κορυφές του αρχικού τριγώνου.

Θεώρημα

Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ : Το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρο κυρίως αποτελούν βασική ιδιότητα με την οποία αποδεικνύουμε ότι τρεις ευθείες συντρέχουν σε κάποιο σημείο.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ	
Περίκεντρο	Σημείο τομής μεσοκαθέτων
Έγκεντρο	Σημείο τομής εσωτερικών διχοτόμων
Παράκεντρα	Σημεία τομής δύο εξωτερικών και μίας εσωτερικής διχοτόμου
Ορθόκεντρο	Σημείο τομής υψών
Βαρύκεντρο ή κέντρο βάρους	Σημείο τομής διαμέσων

Ιδιότητες ορθογωνίου τριγώνου

Θεώρημα 1

Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

$$AM = \frac{B\Gamma}{2}$$

Θεώρημα 2 (αντίστροφο)

Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

Πόρισμα

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30^0, τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας.

Παρατηρήσεις για τις ασκήσεις

1. Όταν σε μια άσκηση μας δίνονται τα μέσα δυο τμημάτων εφαρμόζουμε το θεώρημα των μέσων (θεώρημα 1).

a. Αν υπάρχει το τρίγωνο χρησιμοποιώ το θεώρημα,

b. Αν δεν υπάρχει το τρίγωνο και έχω δυο πλευρές και τα μέσα τους, καταλαβαίνω ότι πρέπει να δημιουργήσω τρίγωνο και φέρνω την τρίτη πλευρά. Μετά χρησιμοποιώ το θεώρημα.

2. Όταν έχω ορθογώνιο τρίγωνο και φέρω την διάμεσό του από την ορθή γωνία, δημιουργούνται ισοσκελή τρίγωνα (θεώρημα Ι) και το εκμεταλλεύομαι ανάλογα είτε ζητάω πλευρές είτε γωνίες .

3. Όταν σε ένα τρίγωνο μου ζητάνε να δείξω ότι ένα τμήμα ΑΒ μιας πλευράς ΑΓ ισούται με το 1/2 του υπόλοιπου τμήματος ΒΓ της πλευράς, τότε φέρνω το μέσο Μ του ΒΓ και

a. αποδεικνύω ότι το ζητούμενο τμήμα ΑΒ ισούται με ένα από τα άλλα δυο,
b. αποδεικνύω ότι το ζητούμενο τμήμα ΑΒ ισούται με το 1/3 της πλευράς χρησιμοποιώντας θεώρημα διαμέσων.

4. Για να χωρίσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε ν ίσα ευθύγραμμα τμήματα ακολουθούμε την εξής διαδικασία :

a. Κατασκευάζουμε ημιευθεία Αx και πάνω σε αυτήν θεωρούμε διαδοχικά ίσα ν – το πλήθος ευθύγραμμα τμήματα με το πρώτο να έχει αρχή το Α και το τελευταίο τέλος ένα σημείο που το ονομάζουμε Κ,
b. ενώνουμε το σημείο Β με το τέλος του τελευταίου ευθυγράμμου τμήματος της Αx, δηλαδή το σημείο Κ.
c. Τέλος από καθένα από τα σημεία των ευθυγράμμων τμημάτων που πήραμε στην Αx φέρουμε παράλληλη προς την ΚΒ, τότε από το θεώρημα 3 έχουμε το ζητούμενο.

5. Όταν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι τρεις ευθείες συντρέχουν σε κάποιο σημείο (δηλαδή διέρχονται από το ίδιο σημείο), τότε εξετάζουμε μήπως είναι διάμεσοι σε κάποιο τρίγωνο, ή ύψη ή ακόμα κάποιο από τα χαρακτηριστικά σημεία που είχαμε μελετήσει στο $4^{ο}$ κεφάλαιο : περίκεντρο, έγκεντρο ή παράκεντρο.

§5.10 – 5.12 ΤΡΑΠΕΖΙΑ

Γενικές ιδιότητες

Ορισμός

Τραπέζιο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.
Διάμεσος ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του τραπεζίου.

Θεώρημα 1

Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμα τους.

<u>Πόρισμα</u>

Η διάμεσος ΕΖ τραπεζίου ΑΒΓΔ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεων του.

Ισοσκελές τραπέζιο

<u>Ορισμός</u>

Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.

Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου

Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές τότε:

1. Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες
2. Οι διαγώνιοι του είναι ίσες.

Κριτήρια ισοσκελούς τραπεζίου

1. Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.
2. Οι διαγώνιοι του είναι ίσες

Παρατηρήσεις για τις ασκήσεις

1. Χρησιμοποιούμε παρόμοιες μεθόδους με αυτές που είδαμε στα άλλα τετράπλευρα και σε συνδυασμό με τις ιδιότητες των υπολοίπων τετραπλεύρων.

2. Επίσης πολύ συχνά βοηθά να φέρουμε κάποιο από τα δευτερεύοντα στοιχεία του τραπεζίου όπως :

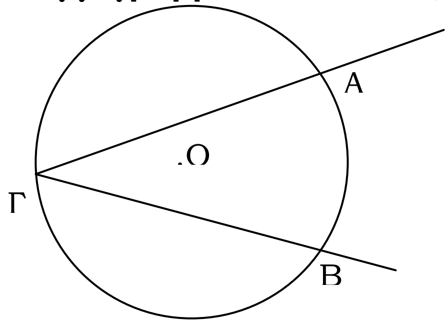
a. η διάμεσος ,
b. τα ύψη από τις κορυφές της μικρής βάσης, οπότε σχηματίζεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο,
c. η παράλληλη από τη μία κορυφή του τραπεζίου προς τη μη παράλληλη πλευρά, οπότε δημιουργείται παραλληλόγραμμο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{ο}

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

§6.1 – 6.4 ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΩΝΙΩΝ

<u>Ορισμός</u> : Ένα ευθύγραμμο σχήμα λέγεται **εγγεγραμμένο σε κύκλο**, αν όλες οι κορυφές του βρίσκονται σε κύκλο.
Μία γωνία λέγεται **εγγεγραμμένη** σε κύκλο, αν η κορυφή της βρίσκεται σε κύκλο και οι πλε-υρές της είναι τέμνουσες του κύκλου. Το τόξο ΑΒ λέγεται **αντίστοιχο τόξο της ΑΓΒ** ή ότι η γωνία Γ **βαίνει στο τόξο ΑΒ.**



Αν σε μία γωνία η μία της πλευρά είναι εφαπτόμενη σε έναν κύκλο και η άλλη της πλευρά είναι τέμνουσα του ίδιου κύκλου, τότε καλείται **γωνία χορδής και εφαπτομένης**.
Μία γωνία λέγεται **επίκεντρη**, αν η κορυφή της είναι το κέντρο ενός κύκλου (Ο,ρ).

ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΩΝΙΩΝ

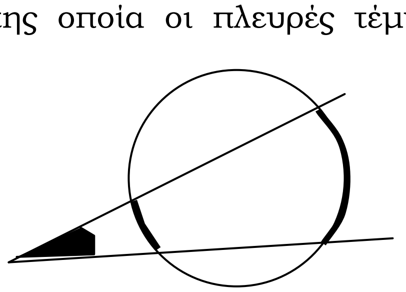
ΘΕΩΡΗΜΑ 1 (εγγεγραμμένης και επίκεντρης). Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας, η οποία <u>βαίνει στο ίδιο τόξο.</u>

Πόρισμα : Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : (γωνία χορδής και εφαπτομένης). Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή ενός κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη, η οποία βαίνει στο τόξο της χορδής.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1 : (γωνία δύο τεμνουσών). Μία γωνία με κορυφή στο εσωτερικό ή το εξωτερικό ενός κύκλου, της οποία οι πλευρές τέμνουν τον κύκλο λέγεται **γωνία δύο τεμνουσών**.

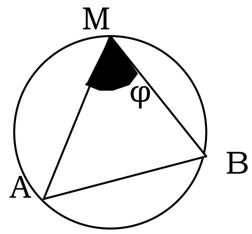
Μια γωνία δύο τεμνουσών που βρίσκεται <u>εσωτερικά στον κύκλο</u> είναι ίση με το <u>ημιάθροισμα</u> των τόξων που ορίζει αυτή και η κατακορυφήν της.



Μία γωνία δύο τεμνουσών που βρίσκεται <u>εξωτερικά του κύκλου</u> είναι ίση με την <u>ημιδιαφορά</u> των τόξων που ορίζει στον κύκλο αυτόν.

Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στον κύκλο – Τόξο κύκλου ως γεωμετρικός τόπος.

Ορισμός : Αν Μ,Α,Β σημεία ενός κύκλου, θα λέμε ότι το **Μ βλέπει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ** υπό γωνία φ, αν φ = ΑΜΒ. Επίσης θα λέμε ότι το **ΑΒ φαίνεται από το σημείο Μ** υπό γωνία φ και ότι το **τόξο τ** που περιέχει τα Α,Β,Μ **δέχεται γωνία φ**.



ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αναλυτική – συνθετική μέθοδος : Κατά την αναλυτική – συνθετική μέθοδο ακολουθούμε τα βήματα της ανάλυσης και της σύνθεσης. Κατά την ανάλυση και με αφετηρία το ζητούμενο, χρησιμοποιώντας δεδομένα από τη θεωρία (προτάσεις που ήδη έχουν δειχθεί) φθάνουμε σε μία νέα ικανή σχέση. Ομοίως στη συνέχεια αναζητούμε νέα ικανή για αυτήν σχέση μέχρι να καταλήξουμε στην υπόθεση της ζητούμενης πρότασης ή σε προτάσεις που έχουν αποδειχθεί πλήρως προηγουμένως. Δηλαδή ακολουθούμε μία αλυσωτή συλλογιστική διαδικασία της μορφής :

$$\Sigma \to \Pi_{\kappa} \to \Pi_{\kappa-1} \to \ldots \to \Pi_2 \to \Pi_1 \to Y$$

Με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε τον *δρόμο* για την απόδειξη του ζητούμενου, οπότε και χρησιμοποιούμε τη σύνθεση, όπου με αφετηρία την υπόθεση – εκμεταλλευόμενοι τα βήματα που βρήκαμε στο βήμα της ανάλυσης – και με διαδοχικούς συλλογισμούς βασισμένους σε δεδομένα και γνωστές προτάσεις καταλήγουμε στο συμπέρασμα. Στη συνέχεια παραθέτουμε παραδείγματα της μεθόδου.

Παρατηρήσεις για τις ασκήσεις

1. Γενικώς ακολουθούμε τις σκέψεις και των προηγουμένων κεφαλαίων και ιδιαίτερα μπορούμε να προσπαθούμε να χρησιμοποιούμε περισσότερο τη διερευνητική μέθοδο αντιμετώπισης ενός προβλήματος (αναλυτική – συνθετική μέθοδος).
2. Ειδικότερα, όταν έχουμε να αντιμετωπίσουμε πρόβλημα με δύο εφαπτόμενους κύκλους, συχνά εξυπηρετεί να φέρουμε την κοινή εξωτερική ή εσωτερική εφαπτομένη.

§6.5 – 6.6 ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΙ ΕΓΓΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

Ορισμός : Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγεγραμμένο** σε κύκλο, αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου. Γενικότερα, ένα πολύγωνο λέγεται εγγεγραμμένο σε κύκλο, αν οι κορυφές του βρίσκονται σε κύκλο.
Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγράψιμο** όταν μπορούμε να φέρουμε κύκλο, ο οποίος να διέρχεται και από τις τέσσερεις κορυφές του. Ο κύκλος στον οποίο είναι εγγεγραμμένο ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγεγραμμένος**.

Ιδιότητες εγγεγραμμένων τετραπλεύρων

ΘΕΩΡΗΜΑ (ιδιότητες εγγεγραμμένων τετραπλεύρων): Ένα τετράπλευρο, το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει :
ι) τις απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές και
ιι) κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

Πόρισμα : Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.

Κριτήρια εγγράψιμων τετραπλεύρων

ΘΕΩΡΗΜΑ (κριτήρια εγγράψιμων τετραπλεύρων): Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν :

α. Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές

β. Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

γ. Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ (περιγεγραμμένο και περιγράψιμο σε κύκλο τετράπλευρο)

1. Ένα περιγεγραμμένο σε κύκλο τετράπλευρο έχει διχοτόμους γωνιών που διέρχονται από το κέντρο του εγγεγραμμένου του κύκλου.
2. Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών ενός περιγεγραμμένου σε κύκλο τετραπλεύρου είναι ίσα.
3. Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο, αν οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.
4. Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο αν τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

Παρατηρήσεις για τις ασκήσεις

3. Σε κύκλους που τέμνονται μας διευκολύνει συχνά να φέρουμε την κοινή χορδή. Θυμηθείτε εδώ ότι : «Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους», επίσης ότι : «Τα εφαπτόμενα τμήματα ενός κύκλου, που άγονται από εξωτερικό του σημείο είναι μεταξύ τους ίσα», καθώς επίσης και άλλα χρήσιμά αποτελέσματα στις παραγράφους 3.14, 3.15.
4. Επίσης, αν θέλουμε να δείξουμε ότι ένας κύκλος που διέρχεται από τρία σημεία Α,Β,Γ, ότι περνά και από ένα Δ, τότε αρκεί τα Α,Β,Γ,Δ να είναι κορυφές εγγράψιμου τετραπλεύρου.