Επαναληπτικές ασκήσεις.

1. Αν η παραπληρωματική μιας γωνίας είναι το τριπλάσιο της συμπληρωματικής της να βρεθεί η γωνία, η παραπληρωματική της και η συμπληρωματικής της.

2. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΔ=ΔΓ=ΓΒ=α και ΑΒ = 2α, τότε να αποδείξετε ότι :

i) Αν $\Delta E \perp AB$ και $\Gamma Z \perp AB$ νδο : ΑΕ = ΖΒ = $\frac{\alpha}{2}$ ii) Να δειχθεί ότι : $\widehat{A}=\widehat{B}=60^{o}$.

3. Αν (Ο, $\frac{\rho}{2}$) και (Κ, $3\frac{\rho}{2}$) δυο κύκλοι, να βρείτε τις σχετικές θέσεις των κύκλων αν :

i) ΟΚ=2ρ ii) ΟΚ=3ρ iii) ΟΚ= $\frac{\rho}{2}$ iv) ΟΚ=ρ v) $OK=7\frac{\rho}{2}$.

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{B}$ = $\widehat{\Gamma}$ $+30^{o}$, $A\Delta \perp B\Gamma$ και Ε,Ζ μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

i) $\widehat{\Delta EB}$ = 120 – 2Γ ii) $\widehat{ZEB}$ = 150 – 2Γ iii) Να βρεθεί η γωνία $\widehat{ZE\Delta}$.

5. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) ώστε ΑΒ+ΔΓ = ΑΔ και Μ μέσο της ΒΓ, Ν μέσο της ΑΔ, τότε να αποδείξετε ότι :

i) ΜΝ = $\frac{A\Delta}{2}$ ii) $\widehat{AM\Delta}$ γωνία ορθή

iii) ΑΜ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ και ΔΜ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$.

6. Από τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\widehat{A}$, η οποία τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα Ε, Ζ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι:

i) το τρίγωνο ΕΑΖ είναι ισοσκελές και ii) ΒΕ + ΓΖ = ΑΒ + ΑΓ.

7. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ, ώστε ΔΓ = ΑΔ + ΒΓ και ΑΕ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$, να αποδείξετε ότι :

i) ΔΕ = ΔΑ ii) ΓΕ = ΓΒ iii)Η ΒΕ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$.

8. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΓ = ΔΒ και $A\Gamma \perp \Delta B$ και Μ,Ν,Κ,Λ μέσα των ΑΔ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ αντίστοιχα, τότε να αποδείξετε ότι :

i) ΜΝ//ΛΚ και ΜΝ = ΛΚ ii) $MN \perp M\Lambda$, iii)το ΜΝΚΛ τετράγωνο.

9. Οι διαγώνιοι τετραπλεύρου ΑΒΓΔ έχουν κοινό μέσο το Ο. Τυχαία ευθεία διερχόμενη από το Ο, τέμνει τις ΑΒ, ΓΔ στα Η,Θ. Να αποδειχθεί ότι ΟΗ = ΟΘ και ΑΗ = ΓΘ.

10. Δίνεται ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο(ΑΒ//ΓΔ) με ΑΔ=ΒΓ και ΓΔ = 3ΑΒ. Αν Ε, Ζ τα μέσα των διαγωνίων του ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα, τότε να αποδείξετε ότι :

i) ΕΖ // ΑΒ και ΕΖ = ΑΒ ii)ΑΕΖΒ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο,

iii)Να δειχθεί ότι οι προεκτάσεις των ΑΕ και ΒΖ είναι ύψη του τραπεζίου.

11. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ παίρνουμε τμήματα ΒΕ και ΓΖ αντίστοιχα ίσα μεταξύ τους, να αποδείξετε ότι :

i) τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΔΖΓ είναι ίσα μεταξύ τους,

ii) οι γωνίες $\widehat{ΗΓΖ} = \widehat{ΓΔΖ}$, iii)η γωνία $\widehat{ΓΗΖ}$ είναι ορθή.

12. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΒΕ \perp ΔΓ$ και $\widehat{ΓΑΒ} = 40^o$, $\widehat{ΓΒΕ} = 15^o$ και $\widehat{ΒΔΑ} = 30^o$, να βρεθούν οι γωνίες $\widehat{ΒΓΕ}$, $\widehat{ΒΔΓ}$, $\widehat{ΑΓΔ}$ και η γωνία που σχηματίζουν οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου.

13. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με τις ορθές γωνίες τις $\widehat{ΔΑΒ}$ και $\widehat{ΑΔΓ}$ και ΒΓ = 2 ΓΔ και ΜΝ διάμεσος του τραπεζίου, να αποδείξετε ότι :

i) ΜΑ = ΜΔ ii) $\widehat{ΔΜΓ} = \widehat{ΔΜΝ}$ γωνίες iii) $\widehat{ΑΜΓ} = 3\ \widehat{ΒΑΜ}$

14. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΓΕ, ΒΔ ύψη του, ενώ Μ μέσο της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι $ΕΜ = ΜΔ$.

15. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και στις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ παίρνουμε τα σημεία Δ,Ε,Ζ έτσι ώστε ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

16. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ορθή τη γωνία Α και ΑΜ διάμεσος, ΑΔ ύψος. Αν $\widehat{Β} > \widehat{Γ}$ τότε να δειχθεί ότι $\widehat{ΜΑΔ} = \widehat{Β} - \widehat{Γ}$.

17. Αν ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο στο Α και ΑΔ ύψος, ενώ Ε, Ζ μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, τότε να δείξετε ότι :

i) οι γωνίες $\widehat{ΖΔΑ}$ και $\widehat{ΖΑΔ}$ είναι ίσες ii) οι γωνίες $\widehat{ΕΔΑ}$ και $\widehat{ΕΑΔ}$ είναι ίσες,

iii) η γωνία $\widehat{ΖΔΕ}$ είναι ορθή

iv) iv) αν επιπλέον ΑΒ = ΑΓ τότε το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

18. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ και Δ μέσο της ΑΜ. Αν ΜΖ//ΒΕ, τότε να δείξετε ότι :

i) ΑΕ = ΕΖ ii) ΕΖ = ΖΓ iii) $ΑΕ = \frac{ΕΓ}{2}$

19. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{Α} = 90^o$), ΑΜ διάμεσος, ΑΔ ύψος και ΑΕ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΒΑΓ}$, ΑΒ ≠ ΑΓ , τότε να δείξετε ότι :

i) Οι γωνίες $\widehat{ΜΑΓ}$ και $\widehat{Γ}$ είναι ίσες, ii) οι γωνίες $\widehat{ΔΑΒ}$ και $\widehat{Γ}$ είναι ίσες και

iii) η ΑΕ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{ΜΑΔ}$.

20. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Αν ΑΖ διχοτόμος και $ΒΕ \perp ΑΖ$ και η προέκταση της ΒΕ τέμνει την ΑΓ στο Θ, ενώ Δ μέσο της ΒΓ, τότε να δείξετε ότι :

i) ΑΒ = ΑΘ ii) ΔΕ // ΘΓ iii) $ΔΕ=\frac{ΘΓ}{2}$ iv) $ΔΕ=\frac{(ΑΓ-ΑΒ)}{2}$

21. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε//ΒΓ που διέρχεται από το Α. Αν Δ τυχαίο σημείο της ΒΓ και ΔΘ//ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ν, ΔΖ//ΑΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ρ, τότε να δειχθεί ότι :

i) ΑΒΔΘ παραλληλόγραμμο ii) ΑΡΔΝ παραλληλόγραμμο,

iii) ΑΓΔΖ παραλληλόγραμμο iv) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΔΘ είναι ίσα.

22. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}$ γωνία 60^o και $ΒΔ\perp ΑΓ$, $ΓΕ\perp ΑΒ$ και ΑΓ > ΑΒ. Αν Μ, Ν μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, τότε να δείξετε ότι :

i) $ΑΔ=\frac{ΑΒ}{2}$ ii) $ΕΜ=ΔΝ=\frac{(ΑΓ-ΑΒ)}{2}$.

23. Έστω ευθείες $ε_1//ε_2$ και ε τέμνουσά τους, ώστε $\widehat{εΑε_1}=45^o$ και $\widehat{ε_2Βε_3}=50^o$, όπου η $ε_3$ τέμνουσα των $ε_1$, $ε_2$ από το σημείο τομής των $ε_1$, ε. Αν Β σημείο τομής των $ε_3$ και $ε_2$ και Γ σημείο τομής των ε και $ε_2$ να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

24. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ < ΑΓ και η γωνία $\widehat{A}$ = 80^o να υπολογισθεί η γωνία $\widehat{ΒΙΓ}$ που σχηματίζεται από τις διχοτόμους ΒΙ και ΓΙ των Β και Γ αντίστοιχα.

25. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}$ = 100 ^{o} και ΑΒ = ΑΓ. Αν Ε, Δ σημεία της ΒΓ, ώστε $ΒΔ=ΑΒ=ΓΕ$, τότε :

i) Να βρεθούν οι υπόλοιπες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ,

ii) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ είναι ίσα,

iii)Να υπολογιστούν οι γωνίες των τριγώνων που σχηματίζονται στο σχήμα.

26. Να βρεθεί το είδος ενός τριγώνου ΑΒΓ στο οποίο ισχύει ότι :

i) η μία του γωνία είναι ίση με το άθροισμα των δύο άλλων,

ii) η μία του γωνία είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο άλλων,

iii)η μία του γωνία είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από καθεμία από αυτές.

27. Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε μία χορδή του ΑΒ και σημεία της Γ, Δ, ώστε ΑΓ=ΒΔ, να δειχθεί ότι :

i) Οι γωνίες $\widehat{ΑΟΓ}$ και $\widehat{ΔΟΒ}$ είναι ίσες ii)τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΒΟΓ είναι ίσα.

28. Δίνεται γωνία $\widehat{χΟψ}$ και ΟΒ εσωτερική της ημιευθεία. Αν Α σημείο της Οχ ώστε $ΟΑ=ΑΒ$ και ΑΒ//Οψ, τότε η ΟΒ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{χΟψ}$.

29. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{B}$ – $\widehat{Γ}$ = 50^o και Δ σημείο της ΑΓ, ώστε ΑΔ=ΑΒ. Να βρεθεί η γωνία $\widehat{ΔΒΓ}$.

2012-2013

30. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}=60^o$, όπου ΒΔ, ΓΕ διχοτόμοι του να δείξετε ότι :

i) οι γωνίες $\widehat{A\Delta B}$ και $\widehat{BE\Gamma}$ είναι ίσες,

ii)Αν επιπλέον ΒΖ = ΒΕ τότε : οι γωνίες $\widehat{BZI}$ και $\widehat{A\Delta B}$ είναι ίσες,

iii) ΔΓ = ΓΖ iv)ΒΕ + ΓΔ = ΒΓ.

31. Σε ορθογώνιο τρίγωνο με $\widehat{A}$ ορθή και ΑΜ διάμεσο, ΑΔ ύψος και $\Delta Z \perp A\Gamma$, $\Delta E \perp AB$ να δείξετε ότι :

i) ΑΕΔΖ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ii) τα τρίγωνα ΑΖΕ και ΑΔΕ είναι ίσα,

iii) οι γωνίες $\widehat{AZE}$, $\widehat{A\Delta E}$ και $\widehat{B}$ είναι ίσες,

iv) η γωνία $\widehat{ZNA}$ είναι ορθή, όπου Ν το σημείο τομής των ΑΜ και ΖΕ.

32. Αν οι ημιευθείες Αχ//Βψ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία ΑΒ και Γ σημείο αυτού, τότε να δείξετε ότι ΑΓΒ = χΑΓ – ψΒΓ γωνίες.

33. Αν δύο κύκλοι κέντρων Κ και Λ εφάπτονται εξωτερικά στο Α και ε ευθεία που διέρχεται από το Α τους τέμνει στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, τότε να δείξετε ότι :

i) ΚΒ // ΛΓ και ii) οι εφαπτομένες στα Β και Γ αντίστοιχα είναι παράλληλες .

34. Έστω κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας ΟΑ. Αν ΒΓ μεσοκάθετος της ΟΑ να δείξετε ότι το ΟΒΑΓ είναι ρόμβος.

35. Έστω κύκλος κέντρου Κ και χορδή του ΑΒ. Αν Μ μέσο της ΑΒ και Δ, Γ σημεία της χορδής ώστε ΜΔ = ΜΓ, τότε να δειχθεί ότι ΟΓ = ΟΔ.

36. Δίνονται κύκλοι κέντρων Κ, Λ, Μ με ίσες ακτίνες, όπου Κ, Λ, Μ συνευθειακά διαδοχικά σημεία. Αν Α, Β σημεία τομής των κύκλων προς το ίδιο ημιεπίπεδο, τότε να δειχθεί ότι ΑΒ//ΚΜ.

37. Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και δύο ίσες χορδές του ΑΒ = ΓΔ που τέμνονται στο σημείο Μ. Αν ΟΛ = ΑΒ και ΟΡ = ΓΔ, τότε να δείξετε ότι :

i) τα τρίγωνα ΟΜΛ και ΟΜΡ είναι ίσα, ii) η ΟΜ διχοτομεί τις $\widehat{\Lambda OP}$ και $\widehat{\Lambda MP}$.

38. Έστω κύκλος κέντρου Ο και Α εξωτερικό του σημείο. Αν Β, Γ σημεία του κύκλου ώστε ΑΒ = ΑΓ, τότε να δειχθεί ότι η ΑΟ διχοτομεί τη γωνία ΒΑΓ.

39. Αν ίσες χορδές ΑΒ = ΓΔ ενός κύκλου κέντρου Ο τέμνονται εξωτερικά του κύκλου σε σημείο Μ και $ON \perp AB$, $OP \perp \Delta\Gamma$, τότε να δείξετε ότι :

i) τα τρίγωνα ΟΝΜ και ΟΡΜ είναι ίσα ιι) ΜΒ=ΜΓ

ii) η ΟΜ είναι διχοτόμος των γωνιών $\widehat{NOP}$ και $\widehat{AM\Delta}$.

40. Αν ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΒ = 2 ΒΓ και Ε μέσο της ΔΓ, Ζ μέσο της ΑΒ τότε να δείξετε ότι : i) ΑΔΕΖ ρόμβος ii) το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο.

Καλή μελέτη, καλή επιτυχία, καλό καλοκαίρι...