Μαθηματικά Γ.Π Γ΄ λυκείου – Επανάληψη Χριστουγέννων

1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

$f(x)=\log(9-x^2)$	$f(x)=\sqrt{3-\lvert x\rvert}$	$f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$	$f(x)=\frac{\varepsilon\varphi x}{\lvert x-1\rvert-1}$
$f(x)=\ln\left(\frac{x^2-4x+3}{x-1}\right)$	$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\log(2-\log x)}$	$f(x)=\sqrt{x-\sqrt{x^2-2}}$	$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{4-x}}$

2. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
   i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f. (έτσι κι αλλιώς αυτό το κάνουμε ΠΑΝΤΑ)
   ii. Να αποδειχθεί ότι : $f(x_1)+f(x_2)=f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right), \forall\, x_1, x_2\in D_f$.
3. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=-e^{2x}+4$.
   i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο (0,f(0)).
   ii. Επί της ευθείας (ε) θεωρούμε 2001 σημεία, οι τετμημένες των οποίων x_1, x_2,…,x_{2001} έχουν μέση τιμή 1. Να βρεθεί η μέση τιμή των τεταγμένων.
   iii. Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής μεταβολής των τεταγμένων είναι διπλάσιος από το συντελεστή μεταβολής των τετμημένων.
4. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=ax^3-5x^2+bx+1$.
   i. Να βρεθούν οι $a, b\in\mathbb{R}$ ώστε τα σημεία (2,25) και (1,0) να ανήκουν στη γραφική παράσταση C_f .
   ii. Να παραγοντοποιηθεί η συνάρτηση ως γινόμενο παραγόντων.
   iii. Να βρεθούν τα x για τα οποία είναι $f(x)>0$.

5. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$	$\lim_{x\to 3}\frac{7x-21}{\lvert x-4\rvert+1}$	$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$
$\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)^2}{x^2-9}$	$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{1-\eta\mu^2 x}$	$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}$
$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$	$\lim_{x\to 4}\frac{x-1-\sqrt{x+5}}{x^2-16}$	$\frac{\lim_{x\to 1} 3\sqrt{x}-3}{\sqrt{x-x^2}}$

6. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}\frac{16-x^2}{4}-x & x\neq 4\\ a^2-2a & x=4\end{cases}$.
   i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
   ii. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο 4.
7. Η συνάρτηση θέσης ενός κινητού το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση είναι : $s(t)=3t^2-t$. Να βρεθούν : α) Η μέση ταχύτητα του κινητού στο [2,4], β) Η στιγμιαία ταχύτητα για $t=3$ και γ) ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας για $t=3$.
8. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι : $f(1)=2f'(1)=e$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής

παράστασης C_g της $g(x)=f(\ln(x))$ στο σημείο $x_0=e$.

9. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι συναρτήσεις :

$f(x)=x^4-5x^2+6$	$l(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}$	$g(x)=e^x\cdot(-x^2+2x)$
$d(x)=x^2e^{-x}$	$k(x)=\frac{lnx-1}{x}$	$h(x)=\frac{3x^2}{4x^2+5}$

10. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=xe^x-2e^x$. Να βρεθούν τα ακρότατά της. Να αποδείξετε ότι : $1+xe^{x-1}\geq 2e^{x-1}$.

11. Αν $f(x)=k(x-a)+m, x\in\mathbb{R}$ k,a,m σταθερές, τότε :
    i. Να βρεθεί το α ώστε $f'(1)=1$.
    ii. Να υπολογιστεί $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.
    iii. Να αποδειχθεί ότι η f έχει ελάχιστο.
    iv. Αν $2m-1$ το ελάχιστό της να βρεθεί το m .
    v. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(1,f(1))$.
    vi. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της f στο $x_0=-1$.

12. Μία εταιρεία διαθέτει 20000€ για την περίφραξη ενός ορθογωνίου οικοπέδου ΑΒΓΔ. Αν η πλευρά ΑΒ θα κατασκευαστεί από υλικό κόστους 6€/μ ενώ οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ από υλικό κόστους 5€/μ και στην πλευρά ΓΔ χτιστεί τοίχος κόστους 4000€, να βρεθούν οι διαστάσεις του οικοπέδου, ώστε να έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

13. Ένα φορτηγό διανύει καθημερινά 100km με σταθερή ταχύτητα x km/h. Αν το κόστος καυσίμου είναι 0,8€/λίτρο και το φορτηγό καταναλώνει το καύσιμο με ρυθμό $2+\frac{x^2}{100}$ lt/h, ενώ τα υπόλοιπα έξοδα του φορτηγού είναι 9€/h, τότε :
    i. να εκφραστεί το κόστος της διαδρομής ως συνάρτηση της ταχύτητας x.
    ii. να βρεθεί η σταθερή ταχύτητα x, ώστε τα έξοδα να είναι ελάχιστα, τα οποία και να βρεθούν.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{ax^2+bx}$ με $a,b\in\mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,e^3), B(-1,e)$ τότε :
    i. Να βρεθεί ο τύπος της.
    ii. Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες
    iii. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο σημείο τομής με τον y'y.
    iv. Να αποδειχθεί : $f''(x)=f'(x)\cdot(4x+1)^2+4\cdot f(x)$.
    v. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης της (ε) για x=2.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(2x)$. Να βρεθούν :
    i. Το διάστημα όπου η C_f είναι πάνω από την ευθεία $y=e$.
    ii. Να υπολογιστεί το $f'\left(\frac{e}{2}\right)$.
    iii. Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην $y=\frac{2}{e}x+3$.

16. Αν η συνάρτηση g έχει τύπο $g(x)=f(\sqrt{x})+\sqrt{f(x)}, x, f(x)\in(0,+\infty)$ και $f(2)=f'(2)=f(4)=f'(4)=4$ τότε :
    i. Αν η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) : y=1, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(1,g(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.
    ii. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στη C_g στο $\Gamma(4,g(4))$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-3x}+1$.

i. Να βρεθεί η τιμή της $f''(x)+2f'(x)-3f(x)+3$.
ii. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με x = -1.

18. (Θέμα 3ο-2009) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-6x^2+ax-7, a\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση : $2f''(x)+f'(x)+15=3x^2, x\in\mathbb{R}$.
i. Να αποδειχθεί ότι α = 9
ii. Να υπολογιστεί το όριο : $\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x^2-1}$.
iii. Να βρεθεί η εξίσωση της C_f που είναι παράλληλη στην y=-3x.

19. (**Θέμα 4οΑ-2009**) Έστω $f(x)=lnx-\frac{x}{2}\lambda^2-6\lambda+2, x>0, \lambda\in\mathbb{R}\, σταθερός$. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης.

20. **(Θέμα 2ο-2001)** Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=συνx+ημx$.
i. Να αποδειχθεί ότι $f(x)+f''(x)=0$.
ii. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,1)$.
iii. Να βρεθεί το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε : $\lambda f'\left(\frac{\pi}{2}\right)-2f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

21. **(ΘΕΜΑ 3ο-2003)** Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\frac{x}{x^2-1}$
i. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο:
α. R β. (-1,1) γ. R- {-1,1} δ. (1, + ∞)
ii. Να αποδείξετε ότι f΄(x)<0 για κάθε x του πεδίου ορισμού της.
iii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to -1}\left[(x+1)\cdot f(x)\right]$
iv. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0, f(0)) με τον άξονα x΄x .

22. **(Θέμα 2ο-2010)** Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=2\sqrt{x^2-x+1}-1, x\in\mathbb{R}$.
i. Να υπολογιστεί το $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}$
ii. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$
iii. Να υπολογιστεί η γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με x΄x.

23. **(Θέμα 2ο-2007)** Έστω η συνάρτηση $f(x)=xe^x+3, x\in\mathbb{R}$, τότε :
i. Να αποδειχθεί ότι $f'(x)=f(x)+e^x-3$.
ii. Να βρεθεί το $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-e^x}{x^2-x}$.

24. **(Θέμα 4ο – 2005)** Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$.
i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Λ(1,1).
ii. Από τυχαίο σημείο Μ(x,y) της γραφικής παράστασης της f φέρουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες xx' και yy΄, οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Οx, Οy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Μ, ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη.
iii. Οι τετμημένες πεντε διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος (Ι) έχουν μέση τιμή $\bar{x}=5$ και τυπική απόκλιση $s_x=2$. Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{y}$ και η τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων των σημείων αυτών.

25. Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f(x^2)+f(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$ να βρεθούν τα $f(0), f(1)$.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^2-ax+b, a, b\in\mathbb{R}$. Να υπολογιστούν τα

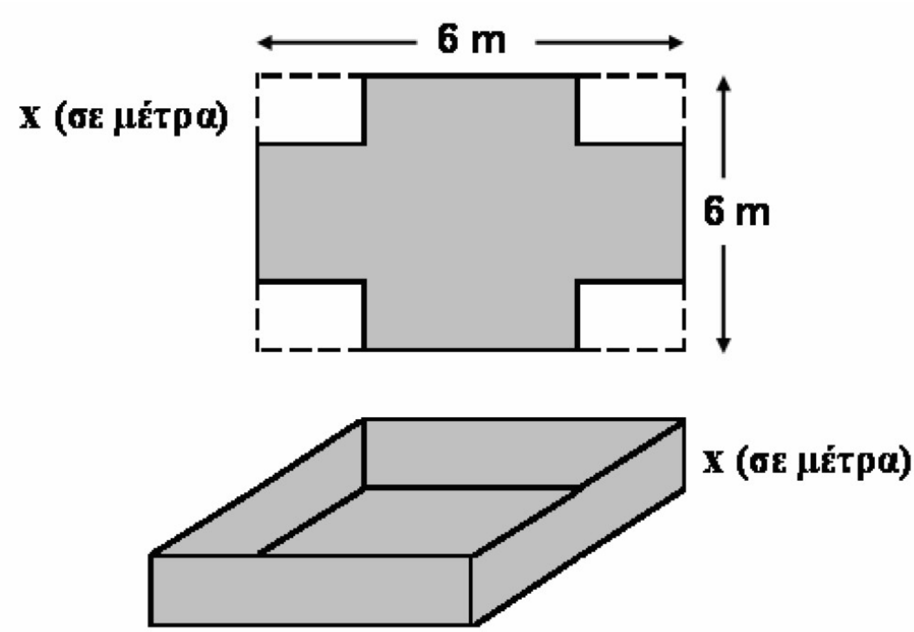
a, b ώστε η $y=3x-1$ να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη 2.

27. Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα πάνω σε άξονα ώστε η θέση του την τυχαία χρονική στιγμή t (σε δευτερόλεπτα) να δίνεται από τον τύπο $x(t)=t^3-12t^2+45t$ σε μέτρα. Να βρεθούν :
   i. Η ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t.
   ii. Οι χρονικές στιγμές, τις οποίες το σώμα είναι ακίνητο.
   iii. Η απόσταση των θέσεων του σώματος όταν αυτό είναι ακίνητο.

28. Να βρεθεί σε ποιο σημείο της γραφικής παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x\ln^2 x$ η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

29. **Επαναληπτικές 2012 ΘΕΜΑ Δ**

Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 6 μέτρων κατασκευάζεται μια δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ανοικτή από πάνω. Από τις γωνίες του φύλλου λαμαρίνας κόβονται τέσσερα ίσα τετράγωνα πλευράς x μέτρων, 0<x<3 και στη συνέχεια οι πλευρές της διπλώνονται προς τα επάνω, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δ1. Να αποδείξετε ότι ο όγκος της δεξαμενής ως συνάρτηση του x είναι $f(x)=4x(3-x)^2, 0<x<3$ (Δίνεται ότι ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων α, β, γ είναι V=αβγ).
Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε για ποια τιμή του x η δεξαμενή έχει μέγιστο όγκο.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το $\lim_{x\to 0}\frac{f(x+2)-8}{x}$.

Μονάδες 4

Δ4. Θεωρούμε τις τιμές $y_i = f(x_i)$, i=1,2,3,4,5 με $1=x_1<x_2<x_3<x_4<x_5=2$, οι οποίες έχουν μέση τιμή $\bar{y}$ =12, τυπική απόκλιση s_y=2 και συντελεστή μεταβολής CV_y.

Να βρείτε το εύρος R των τιμών y_i, i=1,2,3,4,5. Στη συνέχεια να βρείτε τον αριθμό $α\in\mathbb{R}$ με $-12<α<0$ ο οποίος, αν προστεθεί σε καθεμιά από τις τιμές y_i, προκύπτει δείγμα με συντελεστή μεταβολής CV τέτοιον, ώστε $CV=2\text{CV}_y+\frac{R}{12}$.

Μονάδες 6

Δ5. Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τέτοια ώστε Α ≠ ∅, Β ≠ ∅ και Α⊆Β, τότε να αποδείξετε ότι ισχύει: $\frac{P(A)}{P(B)}\leq\left(\frac{3-P(B)}{3-P(A)}\right)^2$ Μονάδες 5

30. Θέμα Δ – 2012

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1+\ln^2 x}{x}, x>0$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
ii. Έστω $M(x, f(x)), x>0$ σημείο της γραφικής παράστασης της f. Η παράλληλη ευθεία από το Μ προς τον άξονα $y'y$ τέμνει τον ημιάξονα Οx στο σημείο Κ(x,0) και η παράλληλη ευθεία από το Μ προς τον άξονα x'x τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο $\Lambda(0, f(x))$. Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων, να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν οτυ ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΟΚΜΛ γίνεται ελάχιστο όταν αυτό γίνει τετράγωνο.
iii. Έστω η ευθεία $\varepsilon: y=\lambda x+\beta, \beta\neq 10,$ η οποία είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\Sigma(1, f(1))$. Θεωρούμε δέκα σημεία $(x_i, y_i), i=1,2,\ldots,10$ της ευθείας ε τέτοια, ώστε οι τετμημένες τους x_i να έχουν μέση τιμή $\bar{x}=10$ και τυπική απόκλιση $s_x=2$. Να βρεθεί για ποιες τιμές του β το δείγμα των τεταγμένων y_i των δέκα σημείων είναι ομοιογενές.
iv. Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα τέτοια, ώστε $A\neq\varnothing$ και $A\cap B\neq\varnothing$ τότε να αποδειχθεί ότι $f(P(A))+f(P(A\cap B))\geq 2f(P(A\cup B))$.

<u>Παρατήρηση : Το θέμα παρατίθεται ολόκληρο για λόγους πληρότητας, αν και περιλαμβάνει ύλη (στατιστική- πιθανότητες) που δεν έχουμε δουλέψει ακόμα.</u>

31. Θέμα Δ – Μάϊος 2010

Ας είναι Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες $P(A), P(B)$ και η συνάρτηση

$$f(x)=\ln(x-P(A))-\frac{1}{2}(x-P(A))^2+P(B), x>P(A)$$

i. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
ii. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0=\frac{5}{3}$ με τιμή $f(x_0)=0$, να αποδειχθεί ότι : $P(A)=\frac{2}{3}, P(B)=\frac{1}{2}$.
iii. Αν επιπλέον $P(A\cup B)=\frac{5}{6}$ να βρεθεί η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα Α, Β.
iv. Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α, Β.

Βιβλιογραφία : users.sch.gr/shasapis

Ευτυχισμένη και δημιουργική νέα χρονιά

Σωτήρης Δ. Χασάπης
Μαθηματικός