Επαναληπτικές ασκήσεις Άλγεβρας Α' λυκείου

Σωτήρης Χασάπης

Σχ. Έτος 2012-13

Άσκηση 0.1 .

Αν $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x<0 \\ \nu x+8 & 0<x<1 \\ \mu x^2+3 & x>=1 \end{cases}$ να βρεθούν οι τιμές των ν,μ, ώστε να ισχύουν: $f(-2) = 5 - f(2), 2f(1) = 3f(\frac{1}{2})$. Στη συνέχεια να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων της γραφικής της παράστασης που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x'x.

Άσκηση 0.2 .

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{|x|-1}$.

- Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.
- Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x'x.
- Να εξεταστεί, αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y'y.
- Να εξεταστεί, αν υπάρχει τμήμα της γραφικής παράστασης της f στο 2ο και στο 3ο τεταρτημόριο

Άσκηση 0.3 .

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} 1-x & x<0 \\ x+6\lambda-\lambda^2 & x\geq 0, \lambda\in\mathbb{R} \end{cases}$

α. Να βρεθεί ο λ ώστε $f(0) = f(-8)$

β. Για $\lambda = 3$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $\sqrt{3\sqrt[3]{f(18)}}$.

γ. Να υπολογιστεί η απόσταση των σημείων $(-3, f(-3)), (0, f(0))$.

Άσκηση 0.4 .

Έστω η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = g(x)$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρώντας την να απαντήσετε στα ερωτήματα :

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της g.

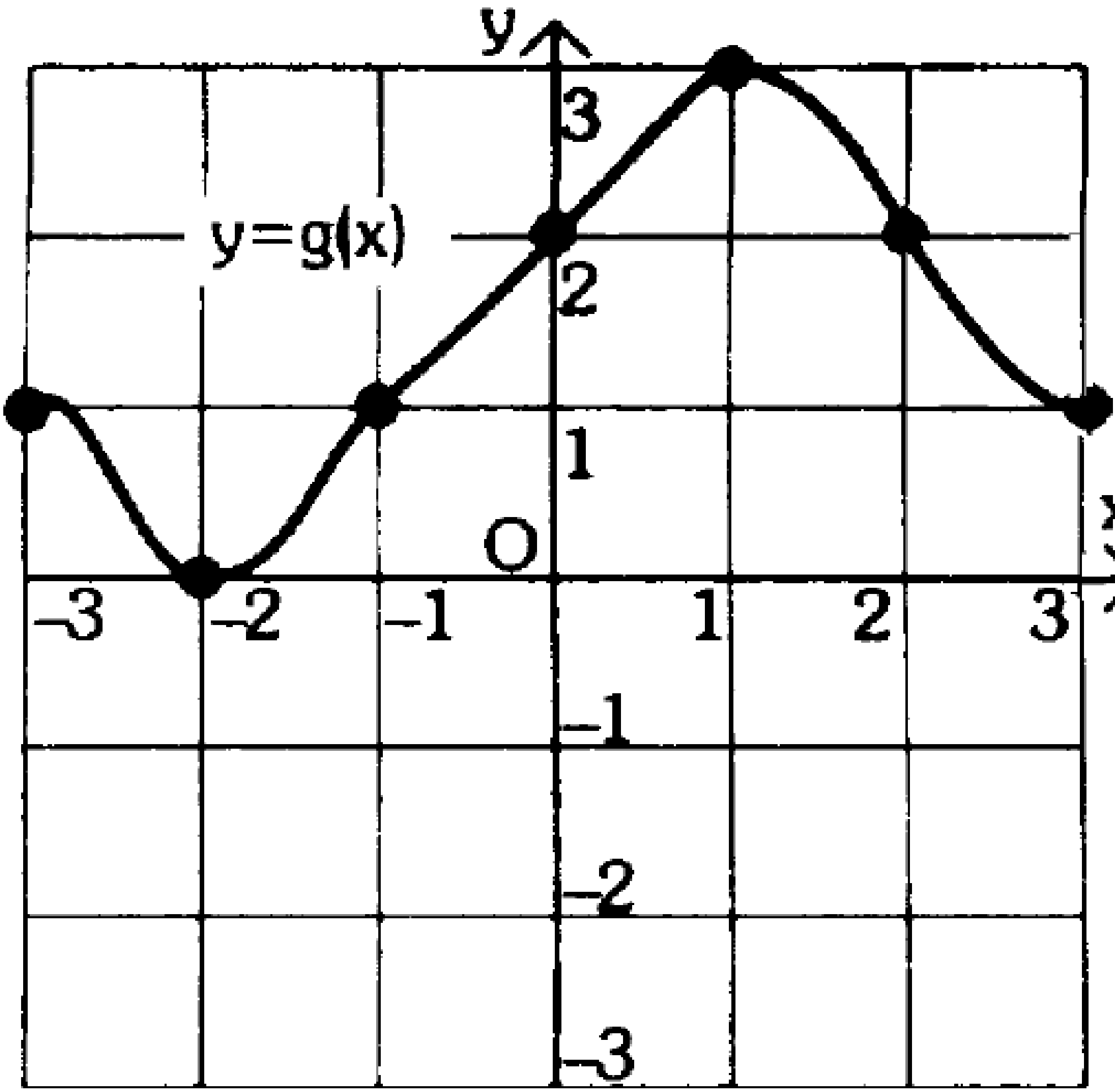
β. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης : $g(2) - (g(-2) - g(-3))$

γ. Να εξεταστεί αν ισχύει ότι : $g(0) > g(3)$ αιτιολογώντας.

δ. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $g(x) = 1$.

ε. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $g(x) > 1$.

στ. Να εξεταστεί (και να αιτιολογηθεί) ποια από τα παρακάτω σημεία θα μπορούσαν να ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$, αν στο προηγούμενο σχήμα δεν απεικονίζεται ολόκληρη η γραφική της παράσταση : $A(4, \frac{1}{2}), B(1,1), \Gamma(-4,2), \Delta(-1,2)$.



Άσκηση 0.5 .

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + (2 - \lambda) = 0, \lambda \in R(1)$
α. Για ποιές τιμές του $\lambda \in R$ η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις;
β. Να βρεθεί το $\lambda \in R$ ώστε ο αριθμός $x = \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{2}}$ να είναι ρίζα της (1)
γ. Αν η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2, να βρεθεί το $\lambda \in R$, ώστε $|x_1 + x_2 + 3x_1x_2| < 22$

Άσκηση 0.6 .

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{|x-2| - |3x+4|}{\sqrt{4-|x|}} + \dfrac{\kappa}{\sqrt{|x|-1}}$
α. Να λύθούν οι ανισώσεις $4 - |x| > 0$ και $|x| - 1 > 0$
β.Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f
γ.Αν το σημείο $A(3, -12)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, να δείξετε οτι $\kappa = 0$
δ. Για $\kappa = 0$, να λύθεί η εξίσωση $f(x) = 0$

Άσκηση 0.7 .

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda(\lambda+3) = 0(1)$

α. Να βρείτε για ποίες τιμές του $\lambda \in R$ η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες λύσεις

β.΄Εστω S και P το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των διαφορετικων πραγματικών ριζών της εξίσωσης (1). Αν ισχύει $P - S = 12$, να προσδιορίσετε την τιμή του $\lambda \in R$

Για την τιμή του $\lambda \in R$ που βρήκατε στο β) ερώτημα,τότε:

γ. Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$

δ. Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού, με ρίζες τους αριθμούς $x_1^2 x_2$ και $x_2^2 x_1$

Άσκηση 0.8 .

Να λυθεί η ανίσωση
$(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 6x) \leq 5(4x - x^2 - 3)$

Άσκηση 0.9 .

΄Εστω η συνάρτηση $f(x) = \left(|x| + \sqrt{x+1}\right)\left(|x| - \sqrt{x+1}\right)$

Δ1. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και αποδείξτε ότι: $f(x) = x^2 - x - 1$

Δ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες τις οποίες και να υπολογίσετε.

Δ3. Να λυθεί η εξίσωση $f(x^2) = 11$,όπου x ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Δ4. Αν x_1, x_2 οι λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος Δ2, να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων

i. $A = \left(2\sqrt{2} + \sqrt{2}x_1\right)^{2012} \cdot \left(2\sqrt{2} + \sqrt{2}x_2\right)^{2012}$

ii. $\dfrac{1}{\sqrt[4024]{A} - 3} + \dfrac{1}{\sqrt[4024]{A} + 3}$

Άσκηση 0.10 .

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

B) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)| = 2$

Γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $0 \leq f(x) \leq 2$

Άσκηση 0.11 .

Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \sqrt{2x+4}, g(x) = \sqrt[3]{27-x}$.

i. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων.

ii. Να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί $f(0), f(6), f(16)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικης προόδου.

iii. Αν ο $f(0)$ είναι ο δεύτερος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου να βρεθεί το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της.

iv. Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου $M(-37, g(-37))$ ως προς άξονες συμμετρίας τους x'x, y'y και ως προς κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

v. Να λυθεί η εξίσωση : $(f(x))^4 - (g(x))^3 = 10$.

vi. Να βρεθεί εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $g(0), g(19)$.

ΤΟΠΙΚΟ ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6

1

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & ,\ x<0\\ \nu x+8 & ,\ 0<x<1\\ \mu x^2+3 & ,\ x>=1\end{cases}$$

$f(-2)=5-f(2)$

$(-2-1)^3=5-\mu 2^2+3 \Leftrightarrow (-3)^3=5-4\mu+3 \Leftrightarrow -27=8-4\mu \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\mu=35 \Leftrightarrow \mu=\frac{35}{4}$

$2f(1)=3f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \mu\cdot 1^2+3=3\nu\frac{1}{2}+24 \Leftrightarrow \frac{35}{4}+\frac{12}{4}-24=\frac{3}{2}\nu \Leftrightarrow$

$\nu=\left(\frac{47}{4}-\frac{96}{4}\right)\frac{2}{3} \Leftrightarrow \nu=-\frac{49}{4}\frac{2}{3} \Leftrightarrow \nu=\frac{-49}{6}$

$$f(x)>0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2>0 \Leftrightarrow x\neq 1 \overset{x<0}{\Leftrightarrow} \boxed{x<0}\\ -\frac{49}{6}x+8>0 \Leftrightarrow \frac{49}{6}x<8 \Leftrightarrow x<\frac{48}{49} \overset{1>x>0}{\Leftrightarrow} x\in\left(0,\frac{48}{49}\right)\\ \frac{35}{4}x^2+3>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R} \overset{x\geq 1}{\Leftrightarrow} \boxed{x\geq 1}\end{cases}$$

2 $f(x)=\sqrt{|x|-1}$

α) Αρκεί $|x|-1\geq 0 \Leftrightarrow |x|\geq 1 \Leftrightarrow x\leq -1$ ή $x\geq 1$ $D_f=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

β) Αρκεί $f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{|x|-1}=0 \Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$

γ) Αν υπήρχε σημείο τομής με $y'y$ θα είχε $x=0 \notin D_f$

δ) Αρκεί $x<0$ με $D_f=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

Οπότε για $x\leq -1$ η C_f ανήκει στο 2ο ή 3ο τεταρτημόριο.

3 α) $f(0)=f(-8) \Leftrightarrow 0+6\lambda-\lambda^2=1-(-8) \Leftrightarrow \lambda^2-6\lambda+9=0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda=3}$

β) $\sqrt{3\sqrt[3]{f(18)}}=\sqrt{3\sqrt[3]{18+18-9}}=\sqrt{3\sqrt[3]{27}}=\sqrt{3\cdot 3}=3$

γ) $f(-3)=1-(-3)=4$ $(-3,4)$ $d=\sqrt{(-3-0)^2+(4-9)^2}=\sqrt{9+25}$

$f(0)=6\cdot 3-9=9$ $(0,9)$ $=\sqrt{34}$

④ α) $D_g = [-3,3]$ β) $g(2) - (g(-2) - g(-3)) = 2 - (0-1) = 2+1 = 3$

γ) $g(0) = 2 > 1 = g(3)$

δ) $g(x) = 1 \Leftrightarrow x = -3$ ή $x = -1$ ή $x = 3$

ε) $g(x) > 1 \Leftrightarrow x \in (-1,3)$

στ) $A(4, 1/2)$ και $B(1,1)$ όχι διότι $(1,3)$, $\Gamma(-4,2)$ και, $\Delta(-1,2)$ όχι $(-1,1)$

⑤ $x^2 - 4x + (2-\lambda) = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$

α) Αρκεί $\Delta < 0 \Leftrightarrow (-4)^2 - 4(2-\lambda) > 0 \Leftrightarrow 16 - 8 + 4\lambda > 0 \Leftrightarrow$

$4\lambda > -8 \Leftrightarrow \boxed{\lambda < -2}$

β) $\sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

$(\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} + 2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow 2 - 4\sqrt{2} + 2 = \lambda \Leftrightarrow \lambda = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1-\sqrt{2})$

γ) $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 4$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 2 - \lambda$

$|x_1 + x_2 + 3x_1x_2| < 22 \Leftrightarrow |4 + 3(2-\lambda)| < 22 \Leftrightarrow |4 + 6 - 3\lambda| < 22 \Leftrightarrow$

$|10 - 3\lambda| < 22 \Leftrightarrow -22 < 10 - 3\lambda < 22 \Leftrightarrow -32 < -3\lambda < 12 \Leftrightarrow$

$\boxed{-4 < \lambda < \frac{32}{3}}$

⑦ $x^2 - 2\lambda x + \lambda(\lambda+3) = 0$

α) Αρκεί $\Delta > 0 \Leftrightarrow (-2\lambda)^2 - 4\lambda(\lambda+3) = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 - 12\lambda = -12\lambda > 0$

$\Leftrightarrow \lambda < 0$

β) $S = 2\lambda \quad P = \lambda(\lambda+3) \qquad P - S = 12 \Leftrightarrow \lambda(\lambda+3) - 2\lambda = 12 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda - 2\lambda = 12$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 12 = 0 \qquad \lambda = 3$ ή $\lambda = -4$ από (α) $\lambda < 0$ άρα $\lambda = -4$

γ) $A = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{(-8)^2 + 2(4(-4+3))}{-4(-4+3)}$

$= \frac{64-8}{4} = \frac{56}{4} = \frac{28}{2} = 14$

$x_1^2x_2 \,,\, x_2^2x_1$ $\qquad S_1 = x_1^2x_2 + x_2^2x_1 = x_1x_2(x_1+x_2)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad P_1 = x_1^3x_2^3 = (x_1x_2)^3$

$$x^2 - S_1x + P_1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x_1x_2(x_1+x_2) + (x_1x_2)^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2$$

8) $(x^2-4x+3)(x^2-6x) \leq 5(4x-x^2-3) \Leftrightarrow$

$(x-1)(x-3)x(x-6) + 5(x^2-4x+3) \leq 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x-3)x(x-6) + 5(x-1)(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x-3)[x(x-6)+5] \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)(x^2-6x+5) \leq 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x-3)(x-5)(x-1) \leq 0$

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$(x-1)^2$		+	0	+		+		+	
$x-3$		−		−	0	+		+	
$x-5$		−		−		−	0	+	
P		+	0	+	0	−		+	

$x \in (-\infty, 3] \cup [5, +\infty)$

9) $f(x) = (|x| + \sqrt{x+1})(|x| - \sqrt{x+1})$

α) αρκεί $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \geq -1}$ $\quad D_f = [-1, +\infty)$

$f(x) = (|x| + \sqrt{x+1})(|x| - \sqrt{x+1}) = |x|^2 - (\sqrt{x+1})^2 = x^2 - x - 1$

β) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες τότε $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = -1 < 0$

άρα x_1, x_2 ετερόσημες

$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = 1$ $\qquad\qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

γ) $f(x^2) = 11 \Leftrightarrow (x^2)^2 - x^2 - 1 = 11 \Leftrightarrow (x^2)^2 - x^2 - 12 = 0$

για $y = x^2$: $\qquad y^2 - y - 12 = 0$

$\Delta = 49 \qquad y_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$

$x^2 = 4$ ή $x^2 = -3$

$x = \pm 2$ ή αδύνατη $\qquad$ δεκτή η $\boxed{x = 2}$

δ) $A = (2\sqrt{2} + \sqrt{2}x_1)^{2012} \cdot (2\sqrt{2} + \sqrt{2}x_2)^{2012} = [\sqrt{2}(2+x_1) \cdot \sqrt{2}(2+x_2)]^{2012} =$

$= 2^{2012}(4 + 2x_2 + 2x_1 + x_2x_1)^{2012} = 2^{2012}[4 + 2(x_1+x_2) + x_1x_2]^{2012} =$

$= 2^{2012}(4 + 2 \cdot 1 - 1)^{2012} = 2^{2012} 5^{2012} = 10^{2012}$

ε) $\frac{1}{\sqrt[4024]{A}-3}+\frac{1}{\sqrt[4024]{A}+3}=\frac{1}{\sqrt[4024]{10^{2012}}-3}+\frac{1}{\sqrt[4024]{10^{2012}}+3}=$

$=\frac{1}{\sqrt{10}-3}+\frac{1}{\sqrt{10}+3}=\frac{\sqrt{10}+3}{(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3)}+\frac{\sqrt{10}-3}{(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)}=$

$=\frac{\sqrt{10}+3+\sqrt{10}-3}{10-9}=2\sqrt{10}$

10) $f(x)=\frac{x^2-16}{x^2-4x}$

α) Αρκεί $x^2-4x\neq 0 \Leftrightarrow x(x-4)\neq 0 \Leftrightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0,4\}$

$f(x)=\frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{x\cancel{(x-4)}}=\frac{x+4}{x}=1+\frac{4}{x}$

β) $|f(x)|=2 \Leftrightarrow \left|1+\frac{4}{x}\right|=2 \Leftrightarrow$

$1+\frac{4}{x}=2$ ή $1+\frac{4}{x}=-2 \Leftrightarrow$

$\frac{4}{x}=1$ ή $\frac{4}{x}=-3 \Leftrightarrow$

$x=4$ ή $x=-\frac{4}{3}$

γ) $0\leq f(x)\leq 2 \Leftrightarrow 0\leq 1+\frac{4}{x}\leq 2 \Leftrightarrow$

$0\leq 1+\frac{4}{x}$ και $1+\frac{4}{x}\leq 2 \Leftrightarrow$

$\frac{x+4}{x}\geq 0$ και $\frac{4}{x}-1\leq 0 \Leftrightarrow$

$\frac{x+4}{x}\geq 0$ και $\frac{4-x}{x}\leq 0$.

x		-4		0	
x	$-$		$-$	0	$+$
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$
Π	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$

x		0		4	
$4-x$	$+$		$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$		$+$
Π	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$

$x\in(-\infty,-4]\cup(0,+\infty)$ και $x\in(-\infty,0)\cup[4,+\infty)$

$x\in(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$

(11) i) f: Πρέπει $2x+4 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -4 \Leftrightarrow \boxed{x \geq -2}$ $D_f = [-2, +\infty)$

g: Πρέπει $27-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 27 \Leftrightarrow$ $D_g = (-\infty, 27]$

ii) $f(0) = \sqrt{4} = 2$ $f(6) = \sqrt{12+4} = 4$ $f(16) = \sqrt{36} = 6$

$4 = \frac{6+2}{2} \Leftrightarrow$ ok $4-2 = \omega \Leftrightarrow \omega = 2$

iii) $a_2 = 2$ $\omega = 2$ $a_1 = 0$ $a_{10} = 0 + (10-1)2 = 18$

$S_{10} = \frac{\nu}{2}(a_1 + a_{10}) = 5(0+18) = 90$

iv) $M(-37, g(-37)) = M(-37, \sqrt[3]{27+37}) = M(-37, \sqrt[3]{64}) = M(-37, 4)$

ως προς $x'x$: $M'(-37, -4)$

ως προς $y'y$: $M''(37, 4)$

ως προς O : $M(37, -4)$

v) $(f(x))^4 - (g(x))^3 = 10 \Leftrightarrow$

$(\sqrt{2x+4})^4 - (\sqrt[3]{27-x})^3 = 10 \Leftrightarrow$

$(2x+4)^2 - (27-x) = 10 \Leftrightarrow 4x^2 + 16x + 16 - 27 + x - 10 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 17x - 21 = 0$

$\Delta = 17^2 - 4 \cdot 4(-21) = 289 + 336 = 625$

$x_{1,2} = \frac{-17 \pm 25}{8} \Leftrightarrow x_1 = \frac{8}{8} = 1$ ή $x_2 = \frac{-17-25}{8} = \frac{-42}{8} = -\frac{21}{4}$

vi) $g(0) = 3$ $g(19) = 2$

$(x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$