Θέματα Α΄λυκείου

Προβλήματα

Θ2006Α1

1. Η Α΄ τάξη ενός Λυκείου έχει 5 τμήματα που το καθένα έχει τουλάχιστον 20 μαθητές. Σε καθένα από τους μαθητές των τμημάτων αυτών δίνουμε 10 €. Έτσι δώσαμε 1090€. Να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο αριθμό μαθητών.

Θ2007Α1

Πρόβλημα 1

Δύο παιδιά συζητούν για αλγεβρικά προβλήματα.

Ο Γιάννης λέει στη Μαρία: *Έχω σκεφτεί δύο ακέραιους αριθμούς x και y που είναι τέτοιοι ώστε, αν μειώσω τον x κατά 50 και αυξήσω τον y κατά 40, τότε το γινόμενό τους δεν μεταβάλλεται.*

Η Μαρία ρωτάει το Γιάννη: *Αν αυξήσεις τον αριθμό x κατά 100 και μειώσεις τον αριθμό y κατά 20, τότε πάλι το γινόμενό τους δεν μεταβάλλεται;*

Ο Γιάννης απαντάει: *Πράγματι, αυτό ισχύει.*

Η Μαρία καταλήγει: *Τότε γνωρίζω τους αριθμούς που σκέφθηκες.*

Έχει δίκιο η Μαρία; Εσείς μπορείτε να βρείτε τους αριθμούς που σκέφθηκε ο Γιάννης;

Θ2009γ2

Ο θετικός ακέραιος α είναι περιττός και όταν διαιρεθεί με το 5 δίνει υπόλοιπο 2. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού α .

Θ2009Α1

Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού είναι μεγαλύτερο από το δεκαπλάσιο του αριθμού κατά 75. Να βρεθεί ο αριθμός.

Εξισώσεις – Ταυτότητες – Παραγοντοποιήσεις

Θ2006Α2

2. Να λυθεί η εξίσωση $\lambda(\lambda x+3)=\lambda^3+2\lambda x-2$ για τις διαφορές πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ.

Θ2010Α2

Αν α,β,γ είναι πραγματικοί αριθμοί, με κατάλληλο χωρισμό των όρων της σε ομάδες, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$\mathrm{A}=\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta^3\gamma^2-\beta^4\gamma^2-\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^4 .$$

Θ2010Α3

Να λύσετε το σύστημα:

$$\frac{x}{2}-1=\frac{4}{y} \quad , \quad \frac{x-1}{2}-\frac{2}{3y}=\frac{5}{3}+\frac{x}{3} .$$

Η ιδέα της βολικής **αλλαγής μεταβλητής**.

Θ2008Α4

4. Αν οι πραγματικοί αριθμοί ικανοποιούν τις ισότητες

$$x^2-y=z^2,\ y^2-z=x^2,\ z^2-x=y^2,$$

να αποδείξετε ότι:

(α) $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

(β) Ένας τουλάχιστον από τους x, y, z ισούται με 0.

Διοφαντικές Εξισώσεις – Ανισώσεις

Θ2007Α4

Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί x, y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^6 + 2x^3y^2 + 3x^3 + y^4 + 3y^2 - 40 = 0$$

Θ2016Α4

Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο k, ο οποίος όταν προστεθεί στο γινόμενο

$$A = 2017 \cdot 2016 \cdot 2015 \cdot 2013 \cdot 2012 \cdot 2011,$$

να μας δώσει άθροισμα ίσο με το τετράγωνο ενός ακεραίου.

Θ2008Α2

Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x, y και z που είναι τέτοιοι ώστε $0 \le x \le y \le z$ και

$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 44.$$

Θ2009Α2

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Αν οι αριθμοί μ και ν είναι θετικοί ακέραιοι και ισχύει ότι

$$4^{\mu-2} + 4^{\nu+2} \le 2^{\mu+\nu+1},$$

να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $A = 2^{\mu} + 2^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 34.

Ανισότητες σε Θαλή – Ευκλείδη

Θ2006Α3

3. Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \ge 3\left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

Θέματα Β΄ λυκείου

Προβλήματα

Θ2008Β1

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δεκαπέντε θετικοί ακέραιοι αριθμοί, με ψηφία περισσότερα από 2, έχουν το τελευταίο διψήφιο τμήμα τους τον αριθμό 15. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τους είναι πολλαπλάσιο του 25.

Διοφαντικές

Θ2008Β3

3. Βρείτε τις τριάδες θετικών ακέραιων (x,y,z) με $x \ge y \ge z$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=2,$$

$$x+y+z=300.$$

Παραστάσεις – Συνθήκες – Εξισώσεις - Συστήματα

Θ2009Β3

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y με $x \ge 2009$ και $y \ge -2009$ ισχύει ότι:

$$\sqrt{x-2009}+\sqrt{y+2009}=\frac{x+y}{2}+1,$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{x-y+2}{2}.$$

Θ2009Β4

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} (x+y)^3 = z-2x-y \\ (y+z)^3 = x-2y-z \\ (z+x)^3 = y-2z-x \end{Bmatrix} \qquad (\Sigma)$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Γ΄λυκείου

Θέματα Συναρτήσεων – Συναρτησιακών σχέσεων

Θ2006Γ1

1. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(f(x+y)) = x - f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) + f(-x)$ είναι σταθερή.

Θ2007Γ3

Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f\big(f(x)-f(y)\big) = f\big(f(x)\big) - y, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R},$$

τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

Θ2009Γ2

Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f\big(x-f(y)\big) - f\big(y-f(x)\big) = 2f\big(f(x)-f(y)\big),$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x-f(x)) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Εξισώσεις – Εξισώσεις με ακέραιες λύσεις – Ανισώσεις

Θ2006Γ2

2. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$3^{x+1} - x \cdot 3^x - 4x - 1 = 0.$$

Θ2008Γ3

Να προσδιορίσετε τις τριάδες ακέραιων (x, y, z) με $x \geq y \geq z$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)=6.$$

Ποιες από τις τριάδες αυτές έχουν άθροισμα τετραγώνων ελάχιστο;

Διαιρετότητα – Θεωρία αριθμών

Θ2008Γ1

Αν οι θετικοί ακέραιοι α και β έχουν 120 κοινούς θετικούς διαιρέτες, να προσδιορίσετε το πλήθος των κοινών θετικών διαιρετών των αριθμών

$$\mathrm{A}=4\alpha+5\beta \text{ και } \mathrm{B}=3\alpha+4\beta .$$

Θ2008Γ2

Να προσδιορίσετε το πλήθος και το άθροισμα των άρτιων θετικών ακέραιων που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών $\mathrm{A}=n^2-n+1$ και $\mathrm{B}=n^2+n+1$, όπου n θετικός ακέραιος.

Θ2007Γ4

Για κάθε τρεις μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b και c, που είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 \geq 2 .$$