# Πρότυπα και αριθμοί Catalan


Δημήτρης Παναγόπουλος

Καθηγητής Μαθηματικών

Δρ.Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α.

Σωτήρης Χασάπης

M.Sc. Θεωρητικών Μαθηματικών

8ο ΓΕ.Λ. Περιστερίου

# Πρότυπα (Patterns)

- Πρότυπο : κανονικότητα δομής – γενίκευση.
- Συμπυκνωμένη εμπειρία στη μελέτη ενός μαθηματικού αντικειμένου.
- Η αναγνώριση, κατανόηση και χρήση ενός προτύπου απαιτεί ανάπτυξη μεταγνωστικών λειτουργιών και κατανόηση της δομής σε βάθος.
- Η επέκταση και επαναχρησιμοποίησή τους αποτελεί υψηλό στόχο στην εκπαίδευση.

# Παραδείγματα προτύπων

- Πρότυπα αρίθμησης : Φυσικοί αριθμοί, Ακολουθίες, κ.ά.
- Πρότυπα θέσης : τοπολογία, δίκτυα
- Πρότυπα Επεξήγησης : Λογική, Απόδειξη.
- Πρότυπα μορφής : Γεωμετρία.
- Πρότυπα Συμμετρίας : Πλακοστρώσεις, Διακοσμητικά γεωμετρικά μοτίβα κ.ά.

# Διερεύνηση προτύπων

- Υπόθεση.
- Δοκιμή.
- Έλεγχος – Απόδειξη.
- Γενίκευση.
- Επαναχρησιμοποίηση.

- Τα μαθηματικά είναι η επιστήμη των προτύπων.

# Πλεονεκτήματα προτύπων

- Πολλαπλές αναπαραστάσεις.
- Εφαρμογές σε πραγματικές καταστάσεις.
- Κατανόηση κανόνων μαθηματικών αντικείμενων μέσα από τη χρήση.
- Επίλυση προβλημάτων.
- Ανάπτυξη γενικότερων στρατηγικών επίλυσης.

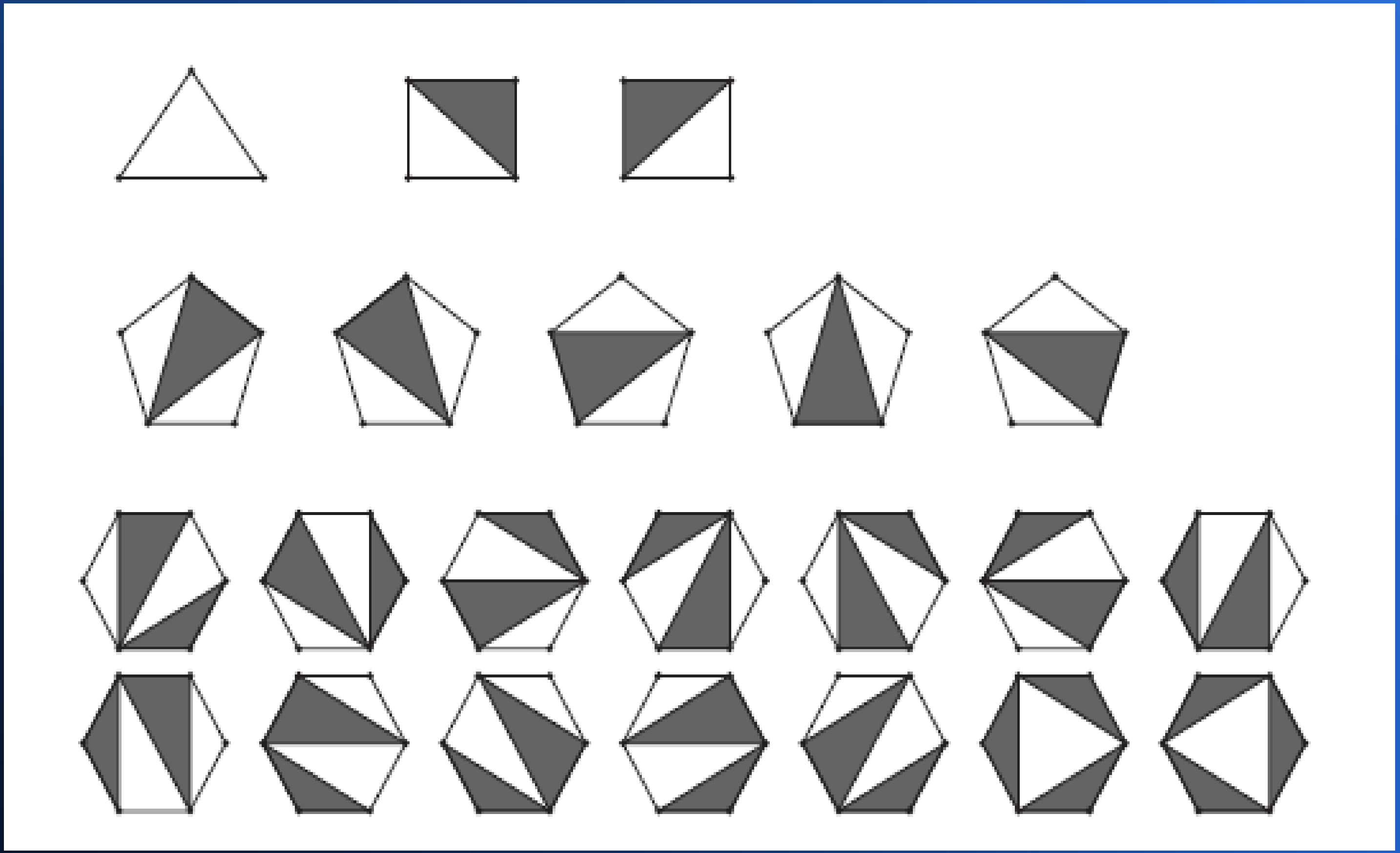
# Αριθμοί Catalan

- 1,1,2,5,14,42,132,429,...
- Πολύπλευρη παρουσία – Διαφορετικοί ορισμοί.
- Πλήθος προβλημάτων : Αλγεβρικά, Γεωμετρικά, Συνδυαστικά, κ.ά.
- Εμφάνιση και στην καθημερίνοτητα.
- Εναλλαγή αναμενόμενου-απροσδόκητου.

# Εμφάνιση των Αριθμών Catalan

- Κίνα : Antu Ming 1730.
- Euler : Τριγωνοποιήσεις 1751.
- E.C.Catalan : Παρενθέσεις 1838.
- R.Stanley : Περισσότερες από 70 χρήσεις.
- Martin Gardner : Η πιο συχνά απροσδόκητα εμφανιζόμενη ακολουθία αριθμών.

# Τριγωνοποιήσεις



# Τριγωνοποιήσεις

- Euler 1761.
- $$T_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-10)}{(n+1)!}, n \geq 3$$

$$C_n = T_{n+2} == \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-2)}{(n+1)!}, n \geq 1$$

# Λίγες πράξεις...

$$C_n = \frac{(4n-2)(4n-6)\cdot\ldots\cdot 6}{(n+1)n\cdot\ldots\cdot 3} =$$

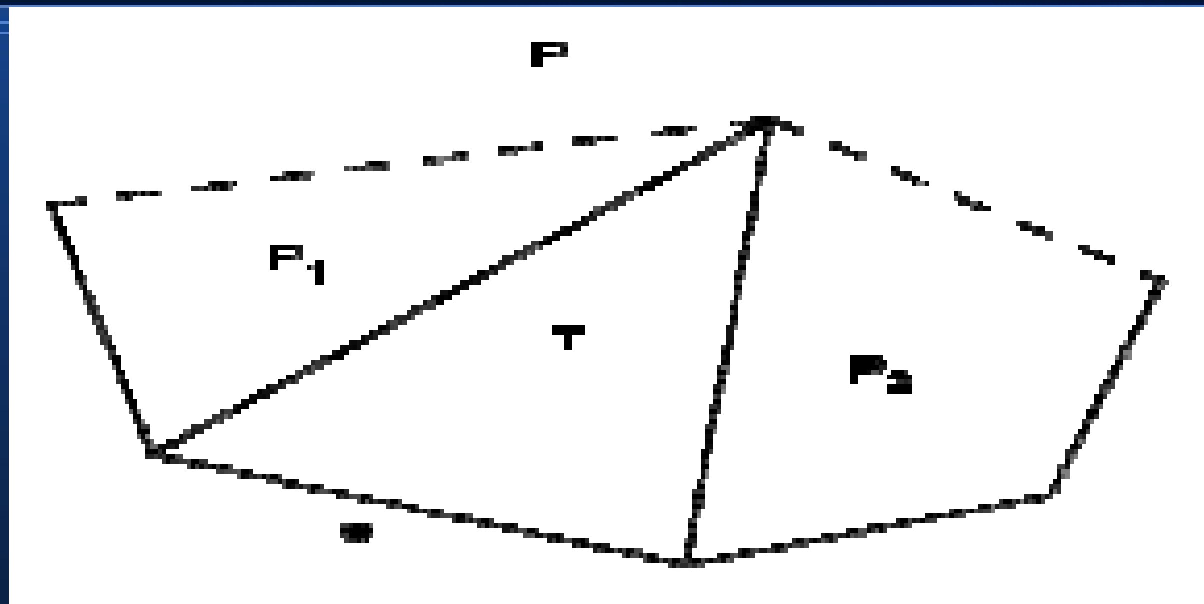
$$= \frac{(4n-2)(4n-6)\cdot\ldots\cdot 6\cdot 2}{(n+1)n\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2} =$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{(n+1)!}\cdot 2^n =$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2}{(n+1)!\,(2n-2)(2n-4)\cdot\ldots\cdot 2}2^n =$$

$$= \frac{(2n)!}{(n+1)!\,2^n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}2^n = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

# Συνδυαστική απόδειξη Segner




$$T_n = T_2 T_{n-1} + T_3 T_{n-2} + \cdots + T_{n-1} T_2, \quad n \geq 3$$

$$C_n = T_{n+2}$$

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_0$$

# Εικασία Urban (1941)

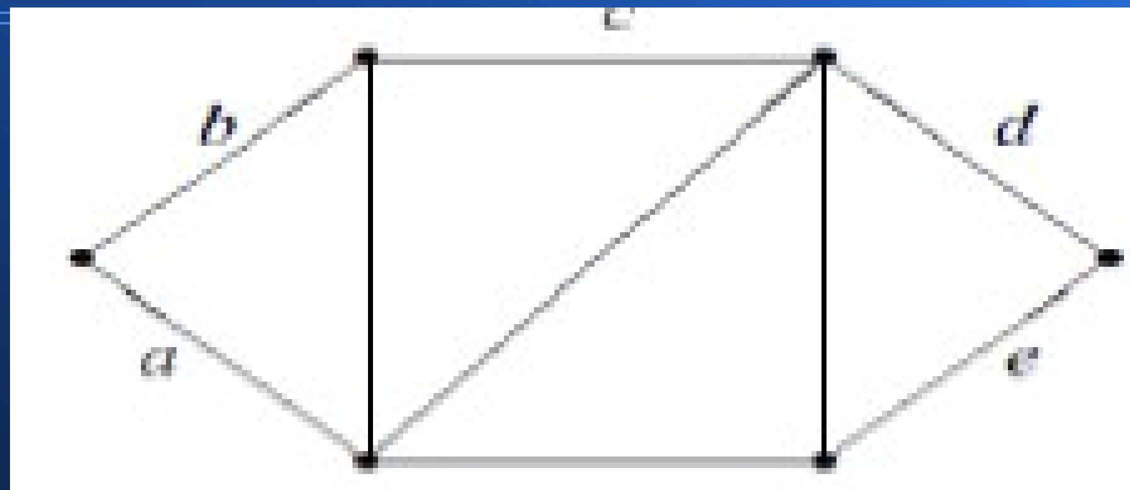
$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{4\cdot[1]-2}{1+[1]}$$

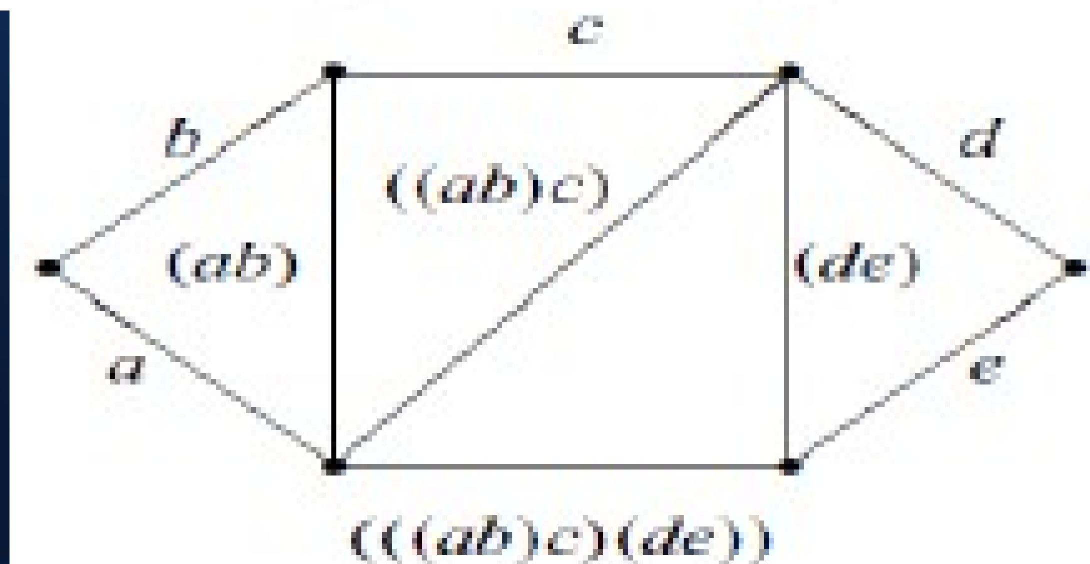
$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{2}{1} = \frac{6}{3} = \frac{4\cdot[2]-2}{1+[2]}$$

$$\frac{C_3}{C_2} = \frac{5}{2} = \frac{10}{4} = \frac{4[3]-2}{1+[3]} \text{ και } \frac{C_4}{C_3} = \frac{14}{5} = \frac{4\cdot[4]-2}{1+[4]}$$

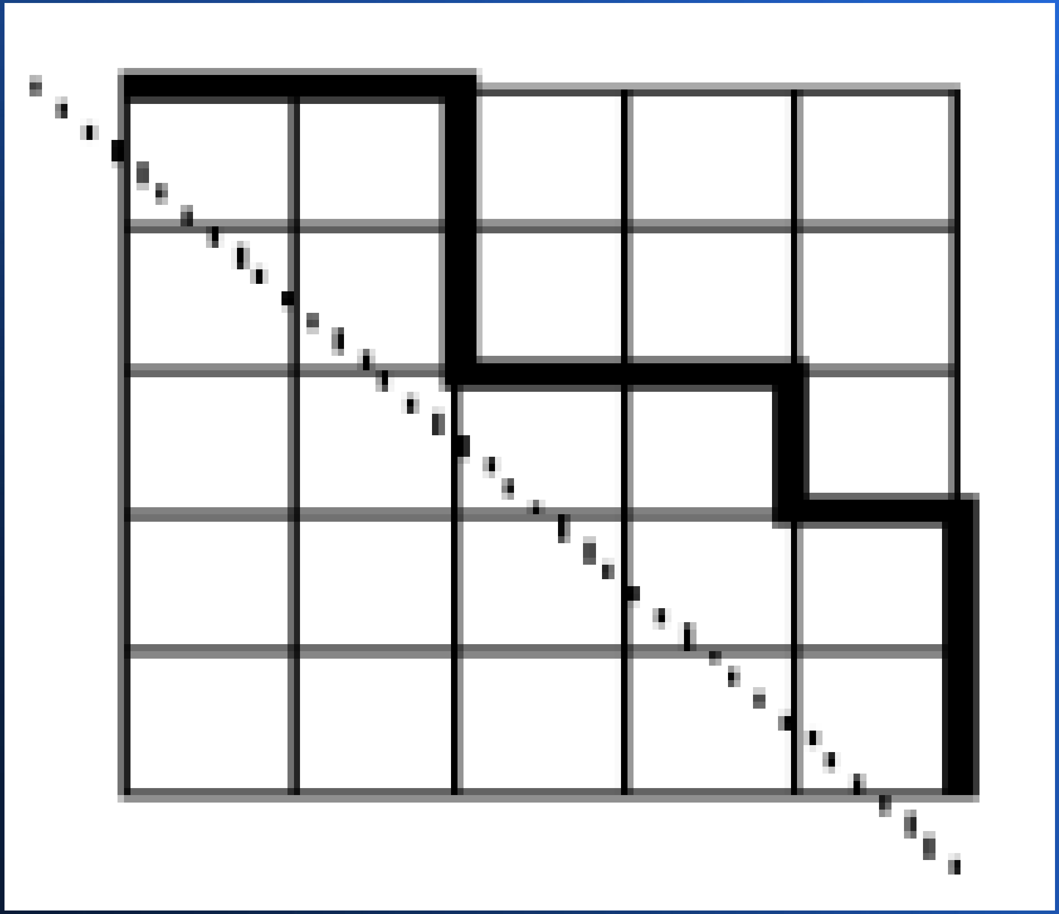
$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{4n-2}{1+n}$$

# Από Τριγωνοποιήσεις σε Παρενθέσεις



# Διαδρομές σε νxν κιγκλίδωμα



# Στο τρίγωνο του Pascal

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | 1 | | | | | | |
| | | | | | 1 | | 1 | | | | | |
| | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | | |
| | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | | |
| | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | | |
| | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 | |
| 1 | | 6 | | 15 | | 20 | | 15 | | 6 | | 1 |

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)n}\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} =$$

# Από παρενθέσεις σε πολυώνυμα και ...

| Ζεύνη | C |
|---|---|
| $\emptyset$ | $1 \cdot x$ |
| (αβ) | $xx = x^2$ |
| ((αβ)γ), (α(βγ)) | $[((xx)x) + (x(xx))] = 2x^3$ |
| (((αβ)γ)δ), ((α(βγ)δ), (α((βγ)δ)), (α(β(γδ))), ((αβ)(γδ)) | $(((xx)x)x) + ((x(xx))x) + (x((xx)x)) + (x(x(xx))) + ((xx)(xx)) = 5x^4$ |

# ...σε τυπικές δυναμοσειρές

$$P(x) = 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 + 5x^4 + \cdots =$$

$$= C_0 x + C_1 x^2 + C_2 x^3 + C_3 x^4 + \cdots$$

# Γεννήτριες συναρτήσεις

- Αναπαράσταση ακολουθίας με τυπική δυναμοσειρά, στην οποία οι συντελεστές είναι οι όροι της ακολουθίας.
- Πλεονεκτήματα : Απλοποίηση υπολογισμών μέσω κλειστού τύπου.

# Κλειστός τύπος

$$C(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots$$

$$\left(C(x)\right)^2 = \left(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots\right) \cdot \left(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots\right) =$$

$$C_0^2 + \left(C_0 C_1 + C_1 C_0\right) x + \left(C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0\right) x^2 + \cdots =$$

$$1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_k x^{k-1} + \cdots$$

$$x\left(C(x)\right)^2 = C(x) - 1$$

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

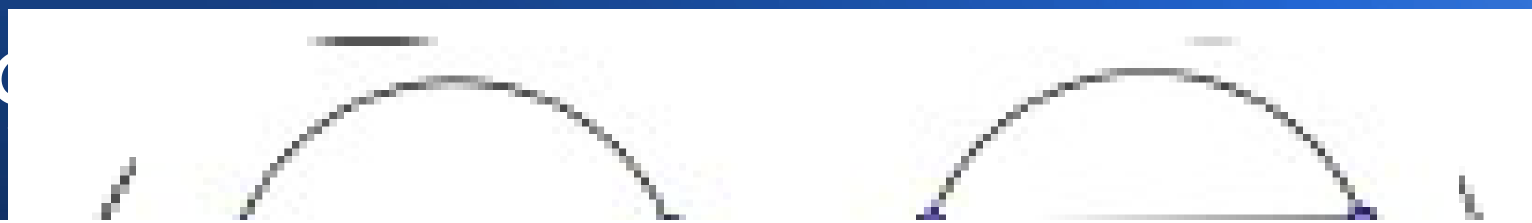
# Συνοψίζοντας στην Ελληνική εκπαίδευση.

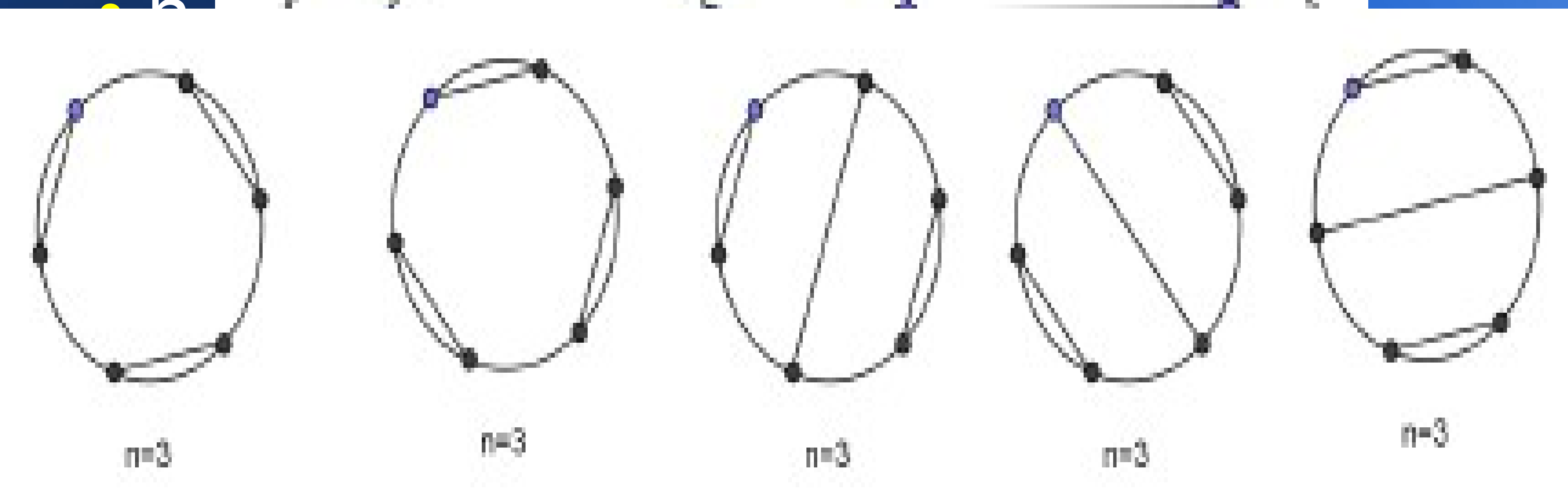
- Προγράμματα σπουδών : Μελέτη προτύπων.
- Δημοτικό : απλά πρότυπα αριθμών (περιττοί , άρτιοι, πρώτοι – σύνθετοί, κλπ.)
- Δημοτικό – Γυμνάσιο : Γεωμετρικά πρότυπα και γενικά σύνθετα επαναλαμβανόμενα πρότυπα.
- Τέλος Γυμνασίου : Συμβολική αναπαράσταση.
- Από επαγωγική συμπερασματολογία σε αφηρημένες – συμβολικές αναπαραστάσεις.

# ...στο Λύκειο και Ανώτερη εκπαίδευση

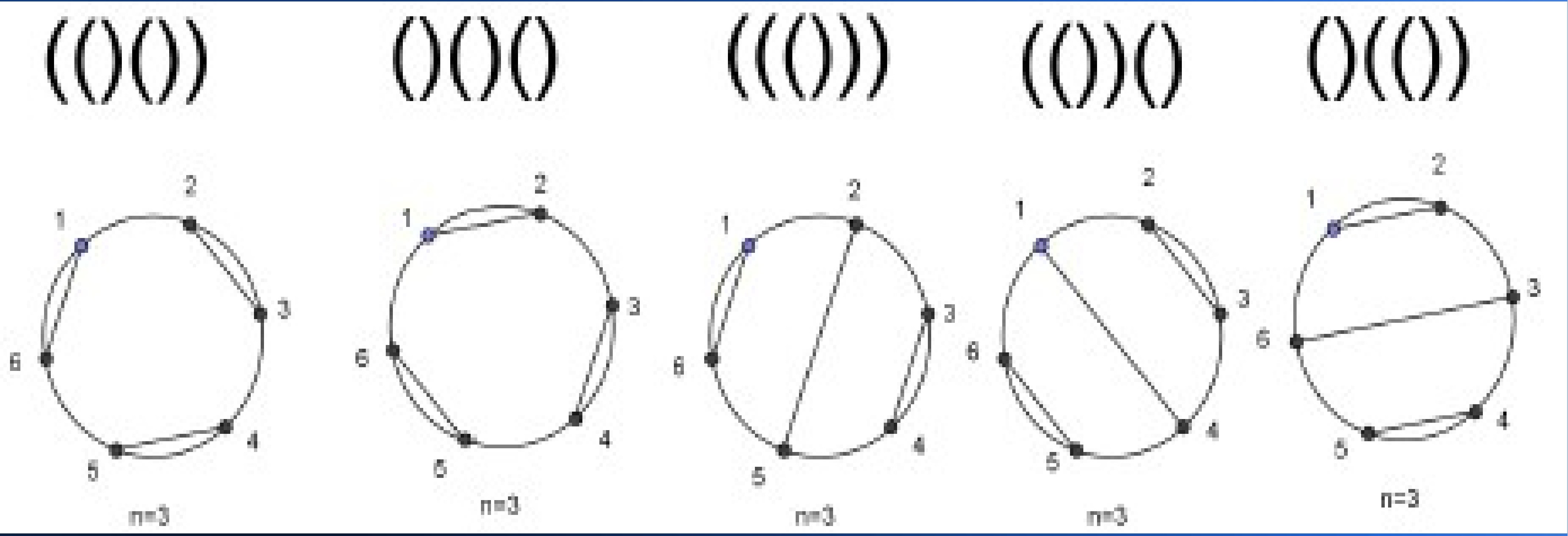
- Συμβολικές αναπαραστάσεις.
- Ενδιαφέρουσες εφαρμογές στην καθημερινότητα.
- Πολλαπλές αναπαραστάσεις → διαφορετικές μορφές προτύπων.
- Εκτίμηση αποτελεσμάτων – Επίλυση προβλημάτων
- Αριθμοί Catalan.

# Για να μην ξεχνιόμαστε...





# Γρήγορη Απόδειξη



# Ευχαριστούμε...

Δημήτρης Παναγόπουλος

Καθηγητής Μαθηματικών

Δρ.Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α.

dpanagop@gmail.com

Σωτήρης Χασάπης

M.Sc. Θεωρητικών Μαθηματικών
8ο ΓΕ.Λ. Περιστερίου

shasapis@gmail.com

# Αναφορές


1. Αργυρόπουλος Η., κ.ά, Ευκλείδια Γεωμετρία,Ο.Ε.Δ.Β. ,2010.

2. Τσικοπούλου Στάμη, Ο ρόλος των προτύπων στη διδασκαλία των μαθηματικών, Ε.Μ.Ε. Πρακτικά 24ου Συνέδριου ,2007.

3. Keith Devlin, Mathematics: the science of patterns,Henry Holt and Company, New York ,1994.

4. Koshy Thomas, Catalan Numbers with Applications, Oxford ,2009.

5. Larcombe Peter, The 18th century Chinese discovery of the Catalan numbers, Mathematical Spectrum 32 5–6 ,1999-2000.

# Αναφορές


6. Mathematical Database, Generating Functions, http://eng.mathdb.org/ , 2008.

7. Resnik Michael D. , Mathematics as a Science of Patterns, Oxford ,1997.

8. Schoenfeld Alan, Learning to think mathematically : Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics, Mac Millan ,1992.

9. Sloane N.J.A., Handbook of Integer Sequences, Academic Pr ,1973.

10. Stanley Richard P., Enumerative Combinatorics vol.I, Wadsworth & Brooks/Cole , 1986.

# Αναφορές


11. Stanley Richard P., Enumerative Combinatorics Vol.II, Cambridge , 1999.

12. Wilf Herbert, generatingfunctionology: Third Edition, CRC Press, 2005.

13. Davis Tom, Catalan Numbers, http://www.geometer.org/mathcircles/catalan.pdf, 2010.

14. Internet Encyclopedia of Philosophy, www.iep.utm.edu.