

# Με Αφορμή Ένα Πρόβλημα ...



*Εργαστήριο Άλγεβρας*

*Πρότυπο Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης*

*Αλκιβιάδης Τζελέπης*

*Σωτήριος Χασάπης*

*Αθήνα, Δεκέμβριος 2018*

- Ομιλίες στο πλαίσιο του Εργαστηρίου Άλγεβρας της Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης.
- Προβλήματα και Εφαρμογές των Μαθηματικών σε διάφορους επιστημονικούς τομείς.
- Peer Coaching and Mentoring (Erasmus+ KA1).

# Η Αρχή του Ήρωνος και η Ανάκλαση του Φωτός

✂ Η Αρχή του Ήρωνος

✂ (Αρχή του Ελαχίστου Δρόμου)

✂ «Ο δρόμος τον οποίον ακολουθεί μία φωτεινή ακτίνα κατά τη διέλευσή της μεταξύ δύο σημείων, είναι ο συντομότερος δυνατός.»



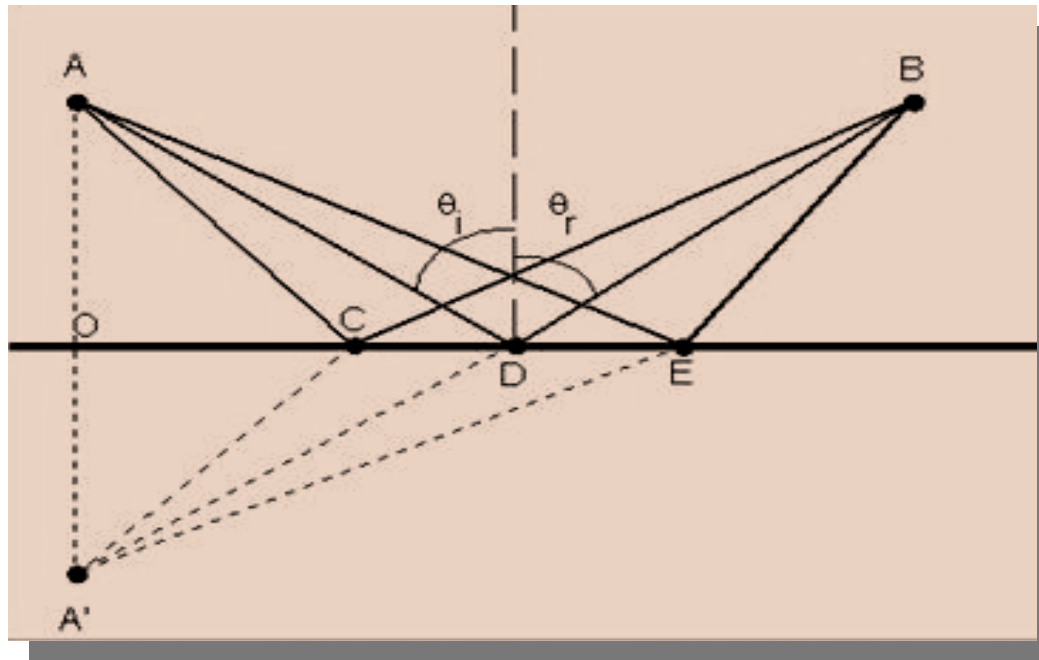
# Η Αρχή του Ήρωνος και η Ανάκλαση του Φωτός

- ✓ Η Αρχή του Ήρωνος διατυπώθηκε ως αποτέλεσμα δύο παρατηρήσεων:
  - i. το φως διαδίδεται ευθύγραμμα σε ομογενές και ισότροπο μέσο και
  - ii. η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων είναι η ευθεία.
  
- ✓ Η Αρχή του Ήρωνος ισχύει τόσο στην περίπτωση ευθύγραμμης διάδοσης μεταξύ δύο σημείων, όσο και στην περίπτωση κατά την οποία η ακτίνα συναντά στο δρόμο της μία ανακλαστική επιφάνεια.
  
- ✓ Ο νόμος της ανάκλασης περιγράφεται από την Αρχή του Ήρωνος.

# Ο Νόμος της Ανάκλασης

## Νόμος Ανάκλασης

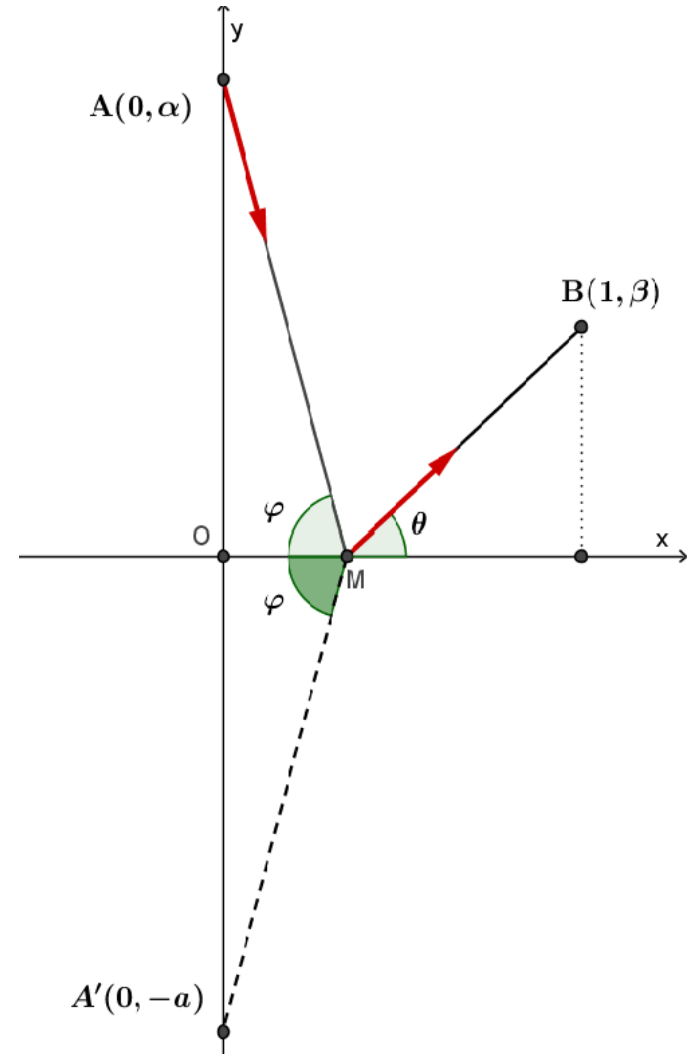
«Η γωνία πρόσπτωσης ισούται με τη γωνία ανάκλασης»



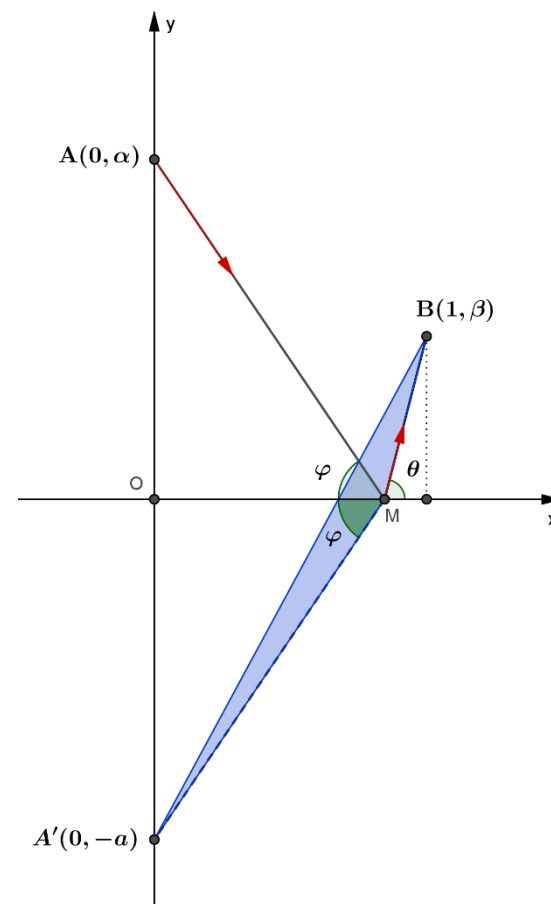
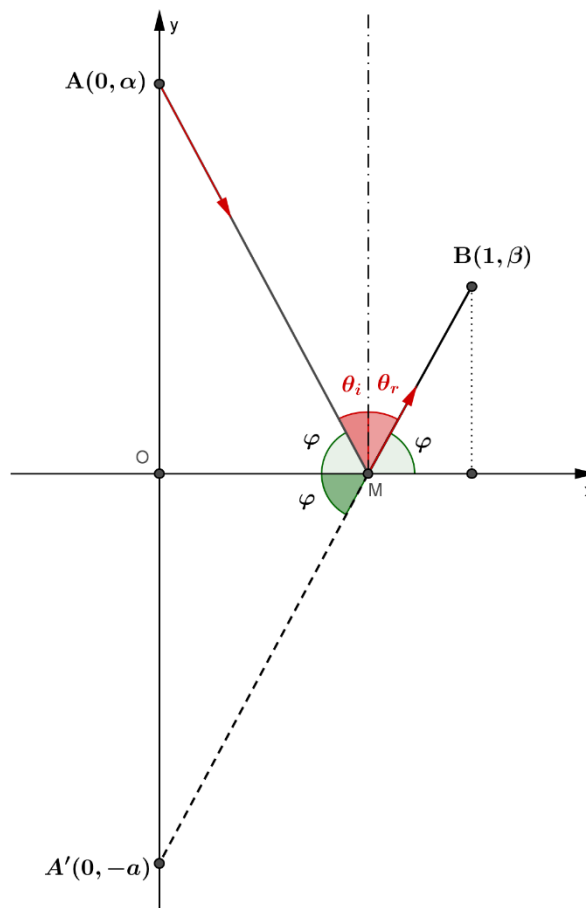
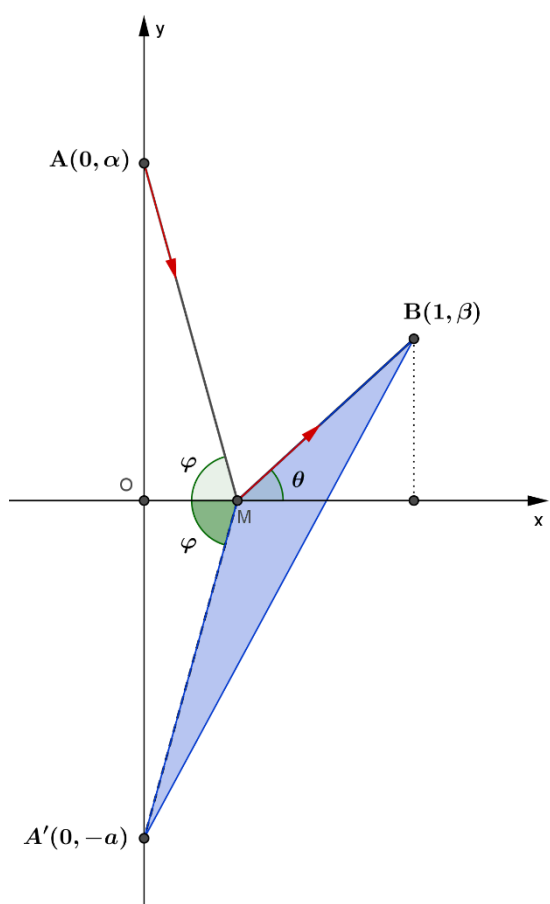
- ✓ Η διαδρομή ADB είναι εκείνη με το ελάχιστο μήκος και η χρονικά συντομότερη.

# Το πρόβλημα: Να αποδειχθεί ο νόμος της ανάκλασης

- ✓ Να αποδειχθεί ότι αν το συνολικό μήκος που διανύεται από το σημείο A έως το σημείο B γίνει ελάχιστο, τότε οι γωνίες  $\varphi$  και  $\theta$  είναι ίσες.
- ✓ Η ιδέα της απόδειξης βασίζεται στην ανάκλαση ως προς μια ευθεία, η οποία αποτελεί ισομετρία.



# Ο Νόμος της Ανάκλασης



## Το Πρόβλημα

Να αποδειχθεί ο νόμος της ανάκλασης:

Μία φωτεινή ακτίνα ανακλώμενη σε επίπεδο καθρέφτη ακολουθεί πορεία, τέτοια ώστε **«η γωνία πρόσπτωσης να ισούται με τη γωνία ανάκλασης»**.

Προαπαιτούμενες Γνώσεις:

- Η Εξίσωση της Ευθείας.
- Η Τριγωνική Ανισότητα (γεωμετρική ιδιότητα – διανυσματική προσέγγιση).
- Η εύρεση συμμετρικών σημείων ως προς άξονα.

## Διδακτικοί Στόχοι:

### ➤ **Η μοντελοποίηση:**

Η μετατροπή ενός προβλήματος φυσικής σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα μαθηματικών.

➤ Η χρησιμότητα της εποπτείας.

➤ Η αναφορά περί μετασχηματισμών (στροφή - μετατόπιση - ανάκλαση).

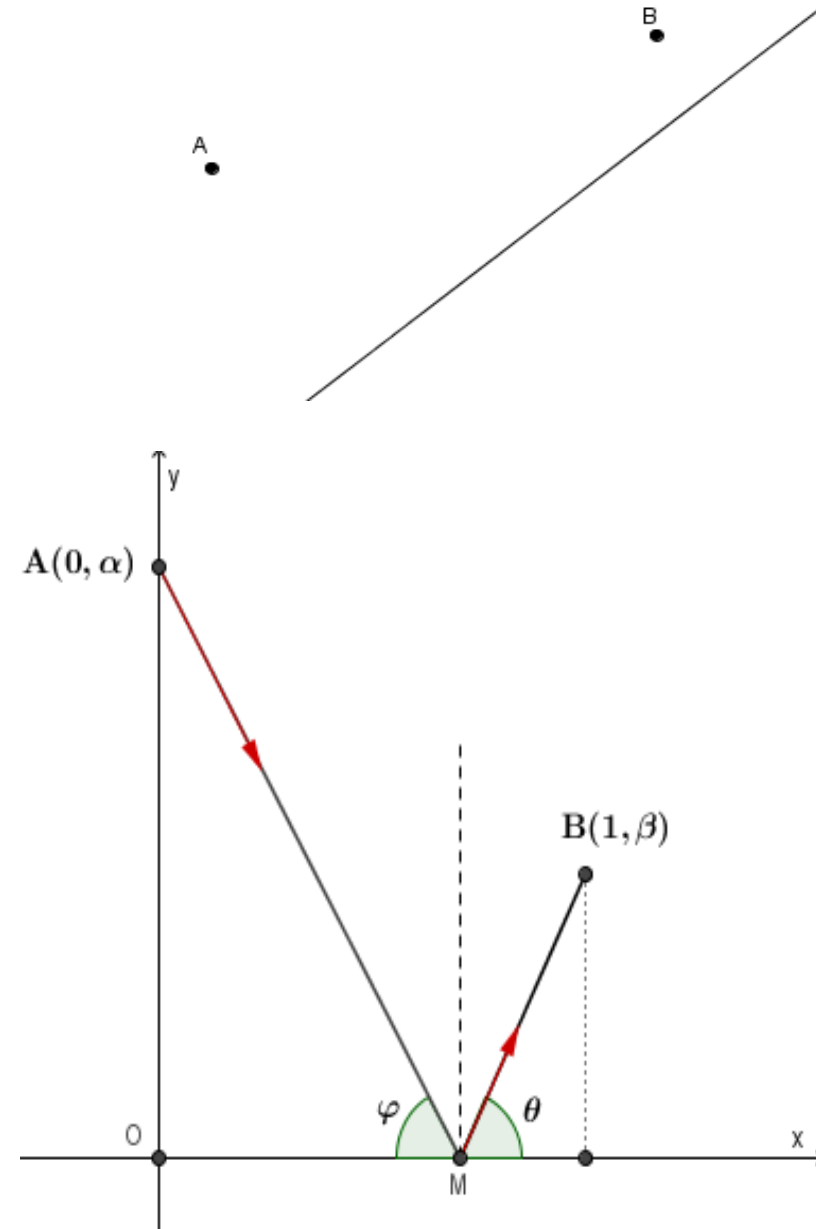
➤ Η αξιοποίηση της συμμετρίας στην επίλυση δύσκολων προβλημάτων.

➤ Ο γεωμετρικός και αλγεβρικός λογισμός.

➤ Η απόδειξη στα μαθηματικά

# Η Πορεία της Διδασκαλίας

1. Ζητείται η σχεδίαση της πορείας μιας φωτεινής ακτίνας που ξεκινάει από το σημείο  $A$  και ανακλώμενη πάνω στην ευθεία κατευθύνεται προς το σημείο  $B$ .
2. Μετασχηματισμός σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων.
3. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  $xOy$  στο οποίο η ευθεία βρίσκεται πάνω στον άξονα  $x'x$  και τα σημεία έχουν συντεταγμένες  $A(0, \alpha)$  και  $B(1, \beta)$ .

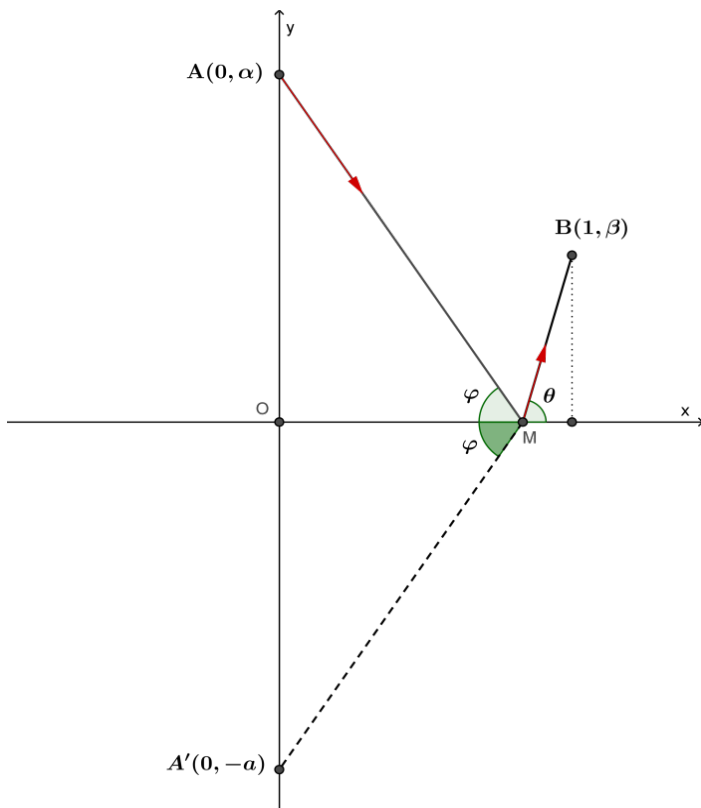


4. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι οι γωνίες  $\varphi$  και  $\theta$  είναι ίσες.
5. Η Αρχή του Ήρωνα: «Ο δρόμος τον οποίον ακολουθεί μία φωτεινή ακτίνα, κατά τη διέλευσή της μεταξύ δύο σημείων, είναι ο συντομότερος δυνατός»  
**“Συντομότερος”**: ο δρόμος με το ελάχιστο μήκος, αλλά και ο χρονικά πιο σύντομος.
6. Να αποδειχθεί ότι **αν** το συνολικό μήκος που διανύεται από το σημείο  $A$  έως το σημείο  $B$  γίνεται ελάχιστο, **τότε** οι γωνίες  $\varphi$  και  $\theta$  είναι ίσες.
7. Το συνολικό μήκος της διαδρομής είναι  $(AM) + (MB)$ .

**Ελαχιστοποίηση!!**

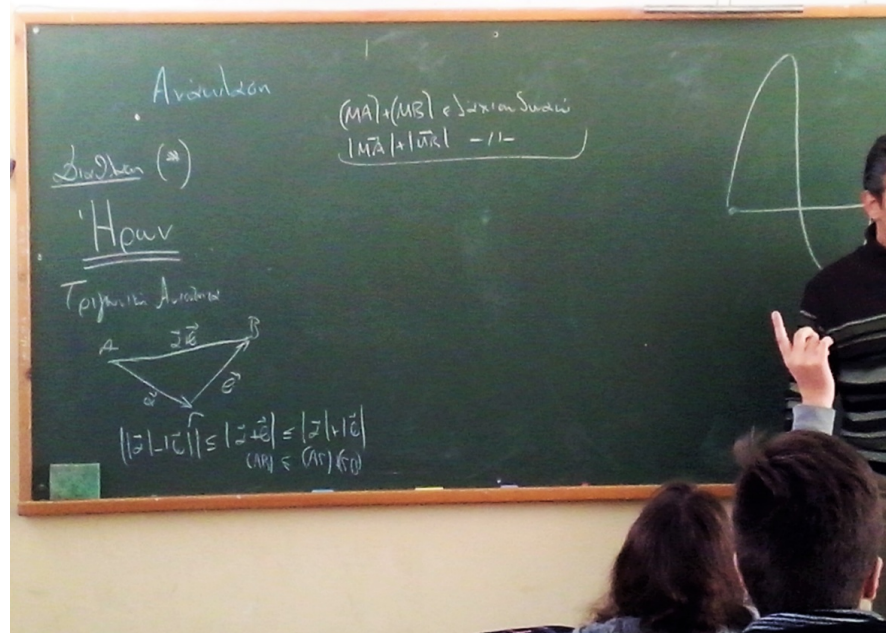
# Η Πορεία της Διδασκαλίας

8. Αντικατάσταση του  $(AM)$  με το  $(A'M)$ , όπου  $A'$  το συμμετρικό του  $A$  ως προς τον  $x'$ .



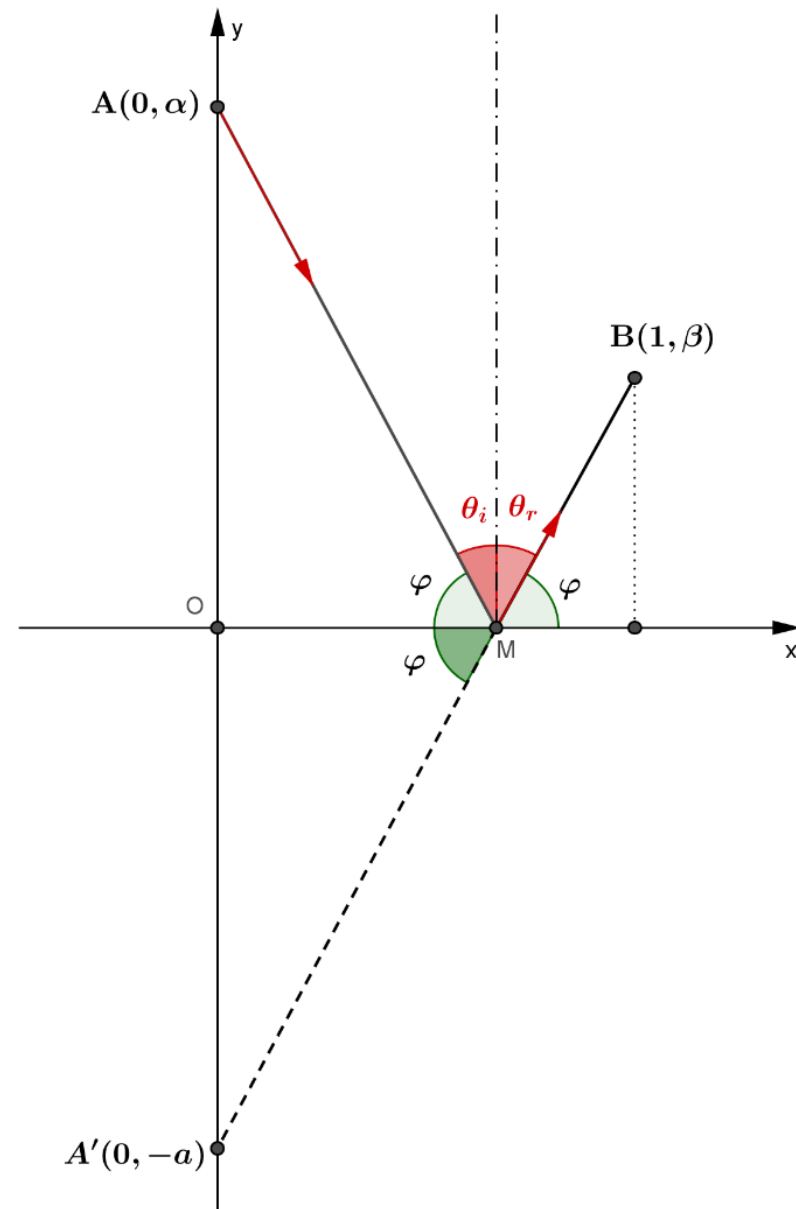
9. Μετασχηματισμός του προβλήματος:

Να αποδειχθεί ότι αν το  $(A'M) + (MB)$  γίνεται ελάχιστο, τότε οι γωνίες  $\varphi$  και  $\theta$  είναι ίσες.



# Η Πορεία της Διδασκαλίας

10. Να βρεθεί η θέση του σημείου  $M$ , έτσι ώστε το  $(A'M) + (MB)$  να γίνεται ελάχιστο:  
Εύρεση του  $M$  με τη βοήθεια της **Γεωμετρίας** και των συντεταγμένων του  $M$  με τη βοήθεια της **Αναλυτικής Γεωμετρίας**.  
Επέκταση για την **Ανάλυση**.



# Η Αρχή του Fermat – Νόμος της Διάθλασης

## Η Αρχή του Fermat (Αρχή του Ελαχίστου Χρόνου)

«Ο δρόμος τον οποίον ακολουθεί μία φωτεινή ακτίνα κατά τη διέλευσή της μεταξύ δύο σημείων, είναι ο χρονικά συντομότερος δυνατός.»



# Η Αρχή του Fermat – Νόμος της διάθλασης

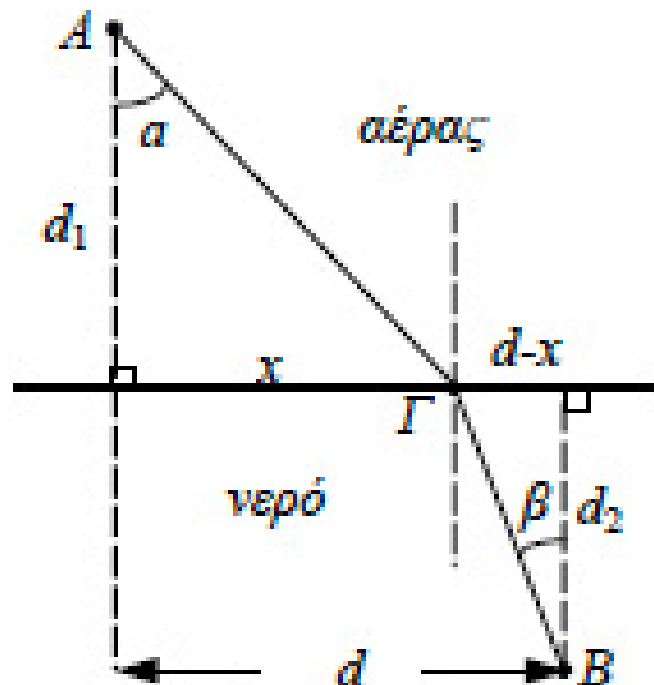
- ✓ Σε ένα ισότροπο μέσο ο συντομότερος δρόμος είναι η ευθεία που ενώνει τα σημεία.
- ✓ Όταν όμως η φωτεινή ακτίνα περάσει από ένα μέσο σε άλλο με διαφορετικό δείκτη διάθλασης, ο χρονικά συντομότερος δρόμος δεν είναι η ευθεία, επειδή η ταχύτητα της φωτεινής ακτίνας είναι διαφορετική στα δύο μέσα.
- ✓ Ο χρονικά συντομότερος δρόμος τότε, είναι μια τεθλασμένη γραμμή, με αποτέλεσμα να παρουσιάζεται το φαινόμενο της διάθλασης.

# Ο Νόμος της Διάθλασης

## Νόμος της Διάθλασης

Το ημίτιχο του ημίτονου της γωνίας πρόσπτωσης προς το ημίτιχο της γωνίας διάθλασης είναι σταθερό για δύο ορισμένα οπτικά μέσα, όπου και υφίσταται η σχέση:

$$\frac{\eta_{\alpha}}{\eta_{\beta}} = c$$



- ✓ Για να αποδειχθεί ο νόμος της διάθλασης χρησιμοποιούνται η θεωρία και οι τεχνικές της Ανάλυσης.

## ΜΕΡΟΣ Β: Peer Coaching and Mentoring

Ο σκοπός του προγράμματος επιμόρφωσης, είναι:

- να δημιουργήσει μια σχέση μέντορα μεταξύ των συμμετεχόντων και του εκπαιδευτή.
- να αποκτηθεί ένα ισχυρό εργαλείο για προσωπική και επαγγελματική ανάπτυξη.
- να δώσει εφόδια στους εκπαιδευτικούς, να ενώνει τις ομάδες και να οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα /



KA1 Mobility Projects

Η μεθοδολογία του προγράμματος επιμόρφωσης:

- περιλαμβάνει συζητήσεις και διαδραστικά παιχνίδια,
- εργασία σε ομάδες και ζευγάρια,
- παρουσιάσεις και μελέτες περιπτώσεων,
- τεχνικές σκέψης και μεμονωμένες δραστηριότητες.
- Η έμφαση δίνεται στην εμπειρία της μάθησης και της εργαστηριακής προσέγγισης.



Η διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος βοηθά τους μαθητές να αναπτύξουν **(GROW)** τη μαθηματική τους σκέψη:

- **G** (for Goal): θέτουν στόχους (επιμέρους – ενδιάμεσους – τελικό).
- **R** (for Reality): συνηθίζουν να σκέπτονται και να εργάζονται μέσα στο κατάλληλο περιβάλλον που δημιουργούν οι συνθήκες του προβλήματος.
- **O** (for Options): ανακαλύπτουν και διερευνούν τις επιλογές που διαθέτουν.
- **W** (for Will/What/When):  
μαθαίνουν να ενεργούν (ACTION).



## Ο Καθηγητής στο ρόλο του καθοδηγητή

1. Βοηθά τους μαθητές να θέτουν έξυπνους (smart) στόχους, δηλαδή
  - ✓ Συγκεκριμένους (specific).
  - ✓ Μετρήσιμους (measurable).
  - ✓ Ακριβείς - εφικτούς (accurate/attainable).
  - ✓ Πραγματοποιήσιμους (realistic).
  - ✓ Σε συγκεκριμένο χρόνο (time bound).



2. Χρησιμοποιεί όλους τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές αντιλαμβάνονται τον κόσμο:  
Οπτικό - Ακουστικό - Κινησθητικό.
3. Ακούει ενεργά.
4. Θέτει δυναμικές ερωτήσεις, οι οποίες ωθούν τους μαθητές να ενεργούν.
5. Δίνει κίνητρο.
6. Διευκρινίζει - Διαμεσολαβεί - Περιγράφει.



### The GROW Model

The GROW Model is deservedly one of the most established and successful coaching models. Created by Sir John Whitmore and colleagues in the 1980s, it was popularized in Sir John's best-selling book, *Coaching for Performance*.



KA1 Mobility Projects

Εργαστήριο Άλγεβρας Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

*Τζελέπης Αλκιβιάδης*

*Χασάπης Σωτήριος*

*Ευχαριστούμε Πολύ*

<http://algebrateacherlab.blogspot.gr>

Με Αφορμή Ένα  
Πρόβλημα ...



*Εργαστήριο Άλγεβρας*

*Πρότυπο Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης*

*Αλκιβιάδης Τζελέπης*

*Σωτήριος Χασάπης*

*Αθήνα, Δεκέμβριος 2018*

- Ομιλίες στο πλαίσιο του Εργαστηρίου Άλγεβρας της Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης.
- Προβλήματα και Εφαρμογές των Μαθηματικών σε διάφορους επιστημονικούς τομείς.
- Peer Coaching and Mentoring (Erasmus+ KA1).

## ■ Η Αρχή του Ήρωνος και η Ανάκλαση του Φωτός

✂ Η Αρχή του Ήρωνος

✂ (Αρχή του Ελαχίστου Δρόμου)

✂ «Ο δρόμος τον οποίον ακολουθεί μία φωτεινή ακτίνα κατά τη διέλευσή της μεταξύ δύο σημείων, είναι ο συντομότερος δυνατός.»



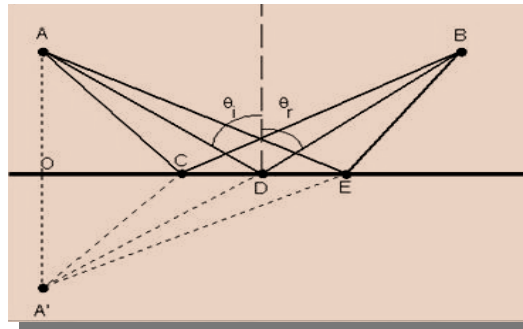
## ■ Η Αρχή του Ήρωνος και η Ανάκλαση του Φωτός

- ✓ Η Αρχή του Ήρωνος διατυπώθηκε ως αποτέλεσμα δύο παρατηρήσεων:
  - i. το φως διαδίδεται ευθύγραμμα σε ομογενές και ισότροπο μέσο και
  - ii. η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων είναι η ευθεία.
  
- ✓ Η Αρχή του Ήρωνος ισχύει τόσο στην περίπτωση ευθύγραμμης διάδοσης μεταξύ δύο σημείων, όσο και στην περίπτωση κατά την οποία η ακτίνα συναντά στο δρόμο της μία ανακλαστική επιφάνεια.
  
- ✓ Ο νόμος της ανάκλασης περιγράφεται από την Αρχή του Ήρωνος.

## Ο Νόμος της Ανάκλασης

### Νόμος Ανάκλασης

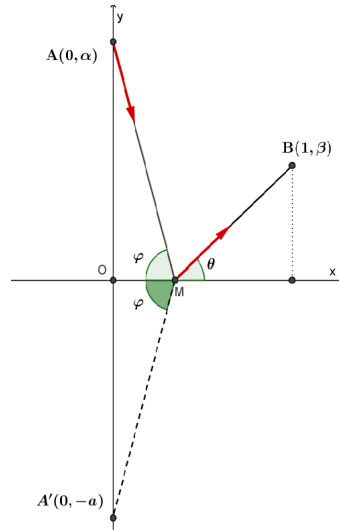
«Η γωνία πρόσπτωσης ισούται με τη γωνία ανάκλασης»



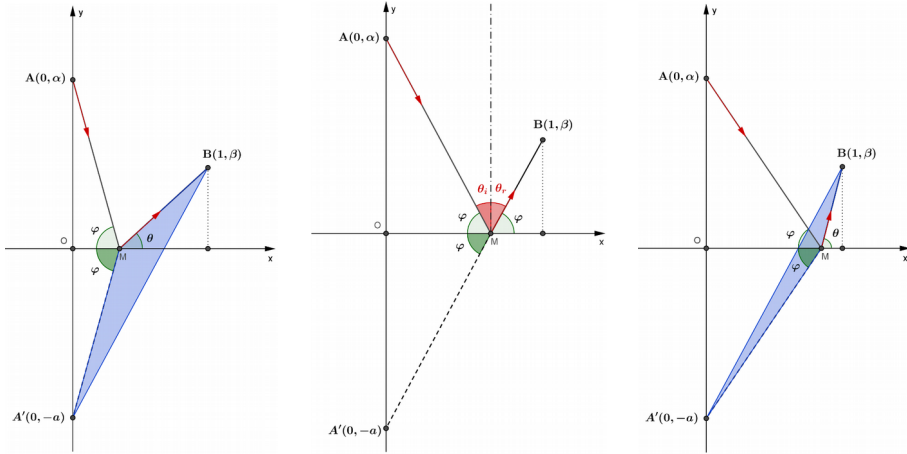
- ✓ Η διαδρομή ADB είναι εκείνη με το ελάχιστο μήκος και η χρονικά συντομότερη.

## ■ Το πρόβλημα: Να αποδειχθεί ο νόμος της ανάκλασης

- ✓ Να αποδειχθεί ότι αν το συνολικό μήκος που διανύεται από το σημείο A έως το σημείο B γίνει ελάχιστο, τότε οι γωνίες  $\varphi$  και  $\theta$  είναι ίσες.
- ✓ Η ιδέα της απόδειξης βασίζεται στην ανάκλαση ως προς μια ευθεία, η οποία αποτελεί ισομετρία.



# Ο Νόμος της Ανάκλασης



### Το Πρόβλημα

Να αποδειχθεί ο νόμος της ανάκλασης:

Μία φωτεινή ακτίνα ανακλώμενη σε επίπεδο καθρέφτη ακολουθεί πορεία, τέτοια ώστε **«η γωνία πρόσπτωσης να ισούται με τη γωνία ανάκλασης»**.

Προαπαιτούμενες Γνώσεις:

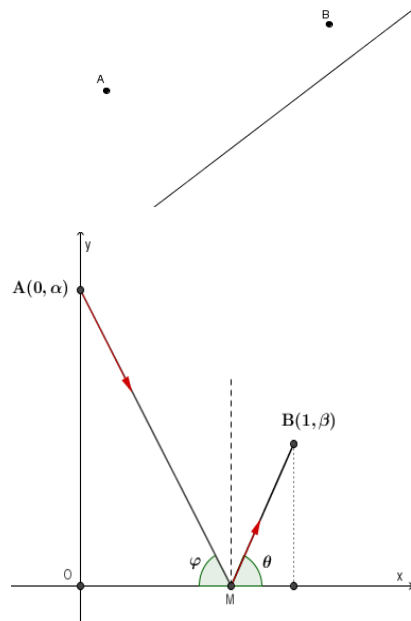
- Η Εξίσωση της Ευθείας.
- Η Τριγωνική Ανισότητα (γεωμετρική ιδιότητα - διανυσματική προσέγγιση).
- Η εύρεση συμμετρικών σημείων ως προς άξονα.

### Διδακτικοί Στόχοι:

- **Η μοντελοποίηση:**  
Η μετατροπή ενός προβλήματος φυσικής σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα μαθηματικών.
- Η χρησιμότητα της ελοπτείας.
- Η αναφορά περί μετασχηματισμών (στροφή - μετατόπιση - ανάκλαση).
- Η αξιοποίηση της συμμετρίας στην επίλυση δύσκολων προβλημάτων.
- Ο γεωμετρικός και αλγεβρικός λογισμός.
- Η απόδειξη στα μαθηματικά

## Η Πορεία της Διδασκαλίας

1. Ζητείται η σχεδίαση της πορείας μιας φωτεινής ακτίνας που ξεκινάει από το σημείο  $A$  και ανακλώμενη πάνω στην ευθεία κατευθύνεται προς το σημείο  $B$ .
2. Μετασχηματισμός σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων.
3. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  $xOy$  στο οποίο η ευθεία βρίσκεται πάνω στον άξονα  $x'x$  και τα σημεία έχουν συντεταγμένες  $A(0, \alpha)$  και  $B(1, \beta)$ .

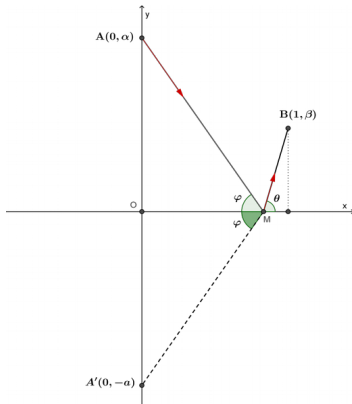


## ■ Η Πορεία της Διδασκαλίας

4. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι οι γωνίες  $\varphi$  και  $\theta$  είναι ίσες.
5. **Η Αρχή του Ήρωτος:** «Ο δρόμος τον οποίον ακολουθεί μία φωτεινή ακτίνα, κατά τη διέλευσή της μεταξύ δύο σημείων, είναι ο συντομότερος δυνατός»  
**“Συντομότερος”:** ο δρόμος με το ελάχιστο μήκος, αλλά και ο χρονικά πιο σύντομος.
6. Να αποδειχθεί ότι **αν** το συνολικό μήκος που διανύεται από το σημείο  $A$  έως το σημείο  $B$  γίνεται ελάχιστο, **τότε** οι γωνίες  $\varphi$  και  $\theta$  είναι ίσες.
7. Το συνολικό μήκος της διαδρομής είναι  $(AM) + (MB)$ .  
**Ελαχιστοποίηση!!**

## Η Πορεία της Διδασκαλίας

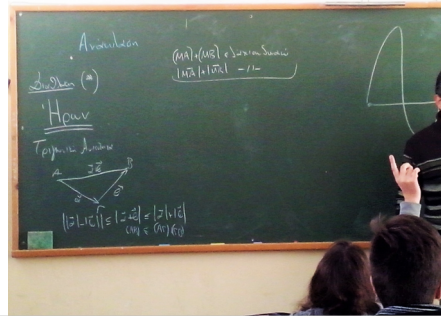
8. Αντικατάσταση του  $(AM)$  με το  $(A'M)$ , όπου  $A'$  το συμμετρικό του  $A$  ως προς τον  $x'x$ .



A. Τζαλέτης

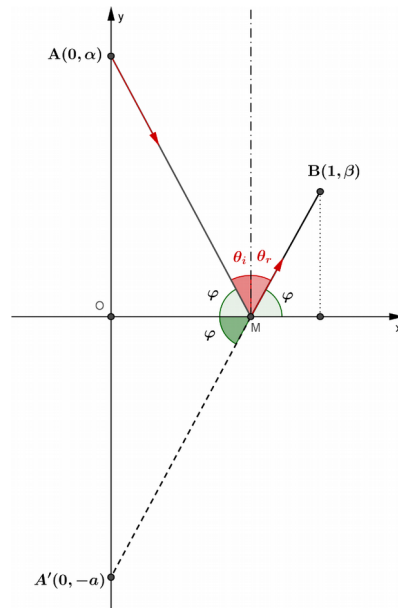
9. Μετασηματισμός του προβλήματος:

Να αποδειχθεί ότι αν το  $(A'M) + (MB)$  γίνεται ελάχιστο, τότε οι γωνίες  $\varphi$  και  $\theta$  είναι ίσες.



## ■ Η Πορεία της Διδασκαλίας

10. Να βρεθεί η θέση του σημείου  $M$ , έτσι ώστε το  $(A'M) + (MB)$  να γίνεται ελάχιστο:  
Εύρεση του  $M$  με τη βοήθεια της **Γεωμετρίας**  
και των συντεταγμένων του  $M$  με τη βοήθεια της **Αναλυτικής Γεωμετρίας**.  
Επέκταση για την **Ανάλυση**.





## Η Αρχή του Fermat - Νόμος της Διάθλασης

Η Αρχή του Fermat

(Αρχή του Ελαχίστου Χρόνου)

«Ο δρόμος τον οποίον ακολουθεί μία φωτεινή ακτίνα κατά τη διέλευσή της μεταξύ δύο σημείων, είναι ο χρονικά συντομότερος δυνατός.»



## ■ Η Αρχή του Fermat - Νόμος της διάθλασης

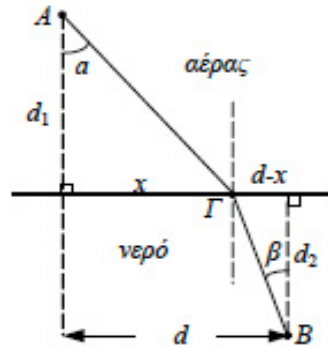
- ✓ Σε ένα ισότροπο μέσο ο συντομότερος δρόμος είναι η ευθεία που ενώνει τα σημεία.
- ✓ Όταν όμως η φωτεινή ακτίνα περάσει από ένα μέσο σε άλλο με διαφορετικό δείκτη διάθλασης, ο χρονικά συντομότερος δρόμος δεν είναι η ευθεία, επειδή η ταχύτητα της φωτεινής ακτίνας είναι διαφορετική στα δύο μέσα.
- ✓ Ο χρονικά συντομότερος δρόμος τότε, είναι μια τεθλασμένη γραμμή, με αποτέλεσμα να παρουσιάζεται το φαινόμενο της διάθλασης.

## Ο Νόμος της Διάθλασης

### Νόμος της διάθλασης

Το ημίτονο του ημίτονου της γωνίας πρόσπτωσης προς το ημίτονο της γωνίας διάθλασης είναι σταθερό για δύο ορισμένα οπτικά μέσα, όπου και υφίσταται η σχέση:

$$\frac{\eta_{\mu\alpha}}{\eta_{\mu\beta}} = c$$



- ✓ Για να αποδειχθεί ο νόμος της διάθλασης χρησιμοποιούνται η θεωρία και οι τεχνικές της Ανάλυσης.

## ■ ΜΕΡΟΣ Β: Peer Coaching and Mentoring

Ο σκοπός του προγράμματος επιμόρφωσης, είναι:

- να δημιουργήσει μια σχέση μέντορα μεταξύ των συμμετεχόντων και του εκπαιδευτή.
- να αποκτηθεί ένα ισχυρό εργαλείο για προσωπική και επαγγελματική ανάπτυξη.
- να δώσει εφόδια στους εκπαιδευτικούς, να ενώνει τις ομάδες και να οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα /



KA1 Mobility Projects

## Peer Coaching and Mentoring

Η μεθοδολογία του προγράμματος επιμόρφωσης:

- περιλαμβάνει συζητήσεις και διαδραστικά παιχνίδια,
- εργασία σε ομάδες και ζευγάρια,
- παρουσιάσεις και μελέτες περιπτώσεων,
- τεχνικές σκέψης και μεμονωμένες δραστηριότητες.
- Η έμφαση δίνεται στην εμπειρία της μάθησης και της εργαστηριακής προσέγγισης.



KA1 Mobility Projects

## Peer Coaching and Mentoring

Η διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος βοηθά τους μαθητές να αναπτύξουν **(GROW)** τη μαθηματική τους σκέψη:

- **G** (for Goal): θέτουν στόχους (επιμέρους - ενδιάμεσους - τελικό).
- **R** (for Reality): συνηθίζουν να σκέπτονται και να εργάζονται μέσα στο κατάλληλο περιβάλλον που δημιουργούν οι συνθήκες του προβλήματος.
- **O** (for Options): ανακαλύπτουν και διερευνούν τις επιλογές που διαθέτουν.
- **W** (for Will/What/When):  
μαθαίνουν να ενεργούν (ACTION).



KA1 Mobility Projects

### Ο Καθηγητής στο ρόλο του καθοδηγητή

1. Βοηθά τους μαθητές να θέτουν έξυπνους (smart) στόχους, δηλαδή
  - ✓ Συγκεκριμένους (specific).
  - ✓ Μετρήσιμους (measurable).
  - ✓ Ακριβείς - εφικτούς (accurate/attainable).
  - ✓ Πραγματοποιήσιμους (realistic).
  - ✓ Σε συγκεκριμένο χρόνο (time bound).



## Peer Coaching and Mentoring

2. Χρησιμοποιεί όλους τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές αντιλαμβάνονται τον κόσμο:  
Οπτικό - Ακουστικό - Κινησθητικό.
3. Ακούει ενεργά.
4. Θέτει δυναμικές ερωτήσεις, οι οποίες ωθούν τους μαθητές να ενεργούν.
5. Δίνει κίνητρο.
6. Διευκρινίζει - Διαμεσολαβεί - Περιγράφει.



## The GROW Model

The GROW Model is deservedly one of the most established and successful coaching models. Created by [Sir John Whitmore](#) and colleagues in the 1980s, it was popularized in Sir John's best-selling book, [\*Coaching for Performance\*](#).



Εργαστήριο Άλγεβρας Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Τζελέπης Αλκιβιάδης

Χασάπης Σωτήριος

*Ευχαριστούμε Πολύ*

<http://algebrateacherlab.blogspot.gr>