Η Αρχή του Ήρωνος και η ανάκλαση του φωτός

Το Πρόβλημα Να αποδειχθεί ο νόμος της ανάκλασης: Μία φωτεινή ακτίνα ανακλώμενη σε επίπεδο καθρέφτη ακολουθεί πορεία τέτοια ώστε **«η γωνία πρόσπτωσης να ισούται με τη γωνία ανάκλασης»**

Προαπαιτούμενες Γνώσεις:

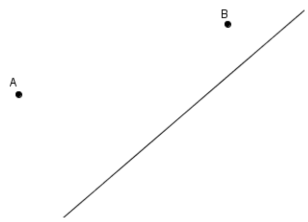
- Εξίσωση ευθείας
- Τριγωνική ανισότητα (γεωμετρική ιδιότητα – διανυσματική προσέγγιση)
- Εύρεση συμμετρικών σημείων ως προς άξονα

Στόχοι:

- Η μοντελοποίηση: η μετατροπή ενός προβλήματος φυσικής σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα μαθηματικών
- Η χρησιμότητα της εποπτείας
- Η αναφορά περί μετασχηματισμών (στροφή – μετατόπιση – ανάκλαση)
- Η αξιοποίηση της συμμετρίας στην επίλυση δύσκολων προβλημάτων
- Ο γεωμετρικός και αλγεβρικός λογισμός

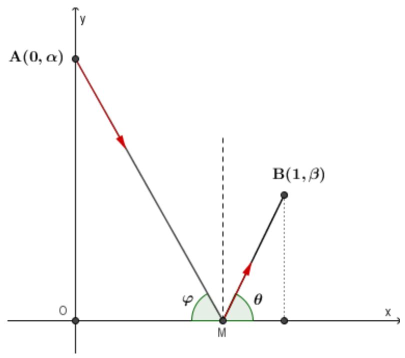
Η Πορεία της διδασκαλίας

1. Ζητείται η σχεδίαση της πορείας μιας φωτεινής ακτίνας που ξεκινάει από το σημείο Α και ανακλώμενη πάνω στην ευθεία κατευθύνεται προς το σημείο Β.



2. Μετασχηματισμός σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων.

3. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων xOy στο οποίο η ευθεία βρίσκεται πάνω στον άξονα x΄x και τα σημεία έχουν συντεταγμένες Α(0,α) και Β(1,β).



4. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι οι γωνίες $\boldsymbol{\varphi}$ και $\boldsymbol{\theta}$ είναι ίσες

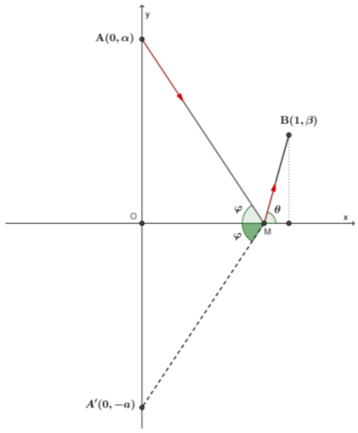
5. **<u>Η Αρχή του Ήρωνος</u>: «Ο δρόμος τον οποίον ακολουθεί μία φωτεινή ακτίνα, κατά τη διέλευσή της μεταξύ δύο σημείων, είναι ο συντομότερος δυνατός»**

“Συντομότερος”: ο δρόμος με το ελάχιστο μήκος, αλλά και ο χρονικά πιο σύντομος.

6. Να αποδειχθεί ότι το συνολικό μήκος που διανύεται από το σημείο Α έως το σημείο Β γίνεται ελάχιστο, όταν οι γωνίες $\boldsymbol{\varphi}$ και $\boldsymbol{\theta}$ είναι ίσες.

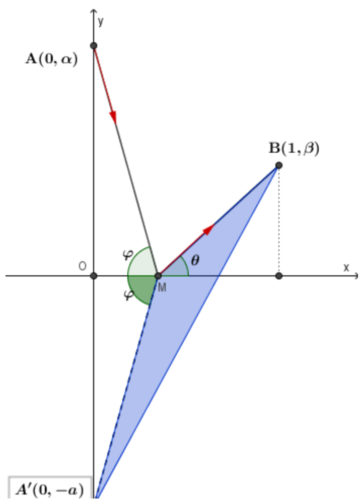
7. Το συνολικό μήκος της διαδρομής είναι *(AM)* + *(MB)*. Ελαχιστοποίηση!!

8. Αντικατάσταση του *(AM)* με το *(A΄M)*, όπου A΄ το συμμετρικό του A ως προς τον x΄x.



Μετασχηματισμός του προβλήματος: Να αποδειχθεί ότι όταν *(A΄M)* + *(MB)* γίνεται ελάχιστο, τότε οι γωνίες $\boldsymbol{\varphi}$ και $\boldsymbol{\theta}$ είναι ίσες.

9. Να βρεθεί η θέση του σημείου Μ, έτσι ώστε το *(A΄M)* + *(MB)* να γίνεται ελάχιστο. Εύρεση του Μ με τη βοήθεια της Γεωμετρίας και των συντεταγμένων του Μ με τη βοήθεια της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Επέκταση για την Ανάλυση.

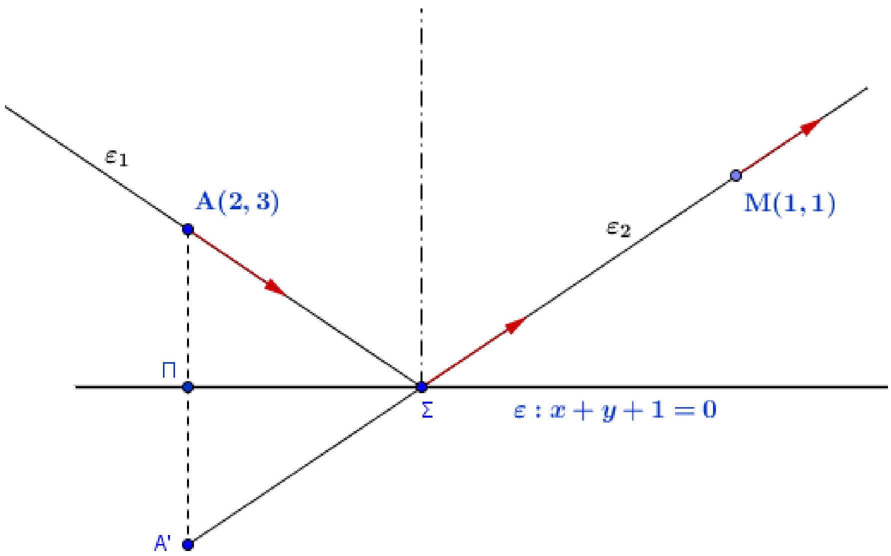


10. Εφαρμογές για προσωπική εργασία.

1η Εφαρμογή Ανάκλασης

Μία φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο Α (2,3) και προσπίπτουσα στην ευθεία με εξίσωση x + ψ + 1 = 0, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο Μ (1,1). Να βρεθούν οι εξισώσεις της προσπίπτουσας και της ανακλώμενης ακτίνας.

<u>Λύση</u>



Η ιδέα είναι, με τη βοήθεια της συμμετρίας, να μετασχηματισθεί το πρόβλημα σε ένα άλλο ισοδύναμο με το αρχικό, το οποίο θα έχει ευκολότερη επίλυση. Η ευθεία που υποδηλώνει την ακτίνα πρόσπτωσης ε_1 θα είναι η ΑΣ, ενώ η ευθεία που υποδηλώνει την ανακλώμενη ακτίνα ε_2 θα είναι η Α΄Μ. Επομένως το πρόβλημα μετατίθεται στην εύρεση του σημείου Α΄ (ως το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ε) και του σημείου Σ (ως σημείου τομής των Α΄Μ και ε).

Το πρώτο βήμα είναι η εύρεσης της προβολής Π του σημείου Α πάνω στην ευθεία (ε). Αφού η κλίση της (ε) είναι $\lambda_\varepsilon = -1 \Rightarrow \lambda_{A\Pi} = 1$ γιατί ΑΠ κάθετη στην (ε). Έτσι η ΑΠ έχει εξίσωση $y - 3 = 1(x - 2)$, δηλαδή ΑΠ: $y = x + 1$.

Η επίλυση του συστήματος $\begin{cases} y = x + 1 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$ δίνει τις συντεταγμένες του σημείου $\Pi(-1,0)$.

Το δεύτερο βήμα είναι η εύρεση του συμμετρικού σημείου $A'(x, y)$. Το Π είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΑΑ΄, και ως εκ τούτου είναι:

$$\begin{cases} \frac{x+2}{2} = -1 \\ \frac{y+3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}, \text{ δηλαδή } A'(-4, -3).$$

Το τρίτο βήμα είναι η εύρεση της ανακλώμενης ακτίνας ε_2, δηλαδή της Α΄Μ. Είναι:

$$y - 1 = \frac{-3-1}{-4-1}(x-1) \Leftrightarrow 4x - 5y + 1 = 0$$

Το τέταρτο βήμα είναι η εύρεση του σημείου Σ, λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 4x - 5y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}, \text{ δηλαδή } \Sigma\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Το τελευταίο βήμα είναι η εύρεση της προσπίπτουσας ακτίνας ε_1, δηλαδή της ΑΣ. Είναι:

$$y - 3 = \frac{3 + \frac{1}{3}}{2 + \frac{2}{3}}(x-2) \Leftrightarrow 5x - 4y + 2 = 0$$

2η Εφαρμογή Ανάκλασης

Μια φωτεινή ακτίνα ακολουθεί την πορεία της ευθείας ε: x –2ψ +5 = 0 και ανακλάται πάνω στην ευθεία η: 3x – 2ψ + 7 = 0. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας την οποία ακολουθεί η ακτίνα μετά την ανάκλαση της.

<u>Υπόδειξη</u>: Έστω Α τυχόν σημείο της ευθείας (ε), για παράδειγμα το Α (– 5, 0). Βρίσκουμε το συμμετρικό του Α΄, ως προς την ευθεία (η). Στη συνέχεια βρίσκουμε το σημείο τομής Σ των ευθειών (ε) και (η). Τότε η ανακλώμενη ακτίνα είναι η ΣΑ΄.

Για περισσότερες πληροφορίες στο

http://algebrateacherlab.blogspot.gr