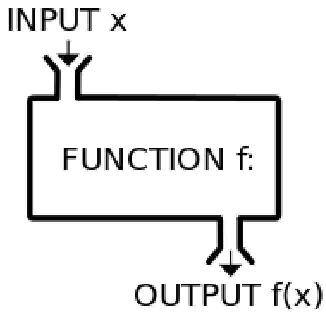
15.2 Ορισμός Συνάρτησης

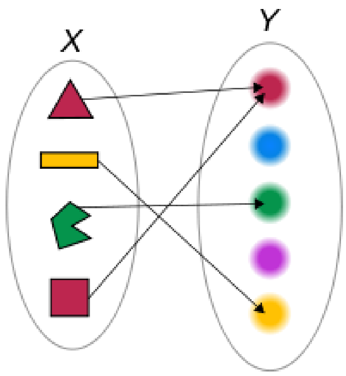
Ορισμός 2. *Μία **πραγματική συνάρτηση** f με πεδίο ορισμού το $A = D_f$ ονομάζεται έναν κανόνας (ή διαδικασία) μέσω του οποίου κάθε στοιχείο $x \in D_f$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y λέγεται τιμή της συνάρτησης f στο x και γράφεται $y = f(x)$. Το σύνολο όλων των τιμών στις οποίες αντιστοιχίζει η συνάρτηση f τους αριθμούς του πεδίου ορισμού της λέγεται **Σύνολο Τιμών** της f και γράφουμε $f(A)$ ή $f(D_f)$. Η μεταβλητή x, μέσω των τιμών της οποίας ορίζεται η συνάρτηση λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ η μεταβλητή $y = f(x)$, η οποία καθορίζεται από τον κανόνα που αντιστοιχεί κάθε αριθμό x σε μία και μοναδική τιμή λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.*

Παράδειγμα 15.1. *Μία γενική εικόνα της έννοιας της συνάρτησης. Μία «μηχανή» , στην οποία ρίχνουμε αντικείμενα, αριθμούς x, κλπ και εξάγει κάποια άλλα αντικείμενα, με βάση συγκεκριμένο κανόνα, ή αριθμούς $f(x)$.*



Σχήμα 1: Μία συνάρτηση που αντιστοιχεί κάθε σχήμα στο αντίστοιχο χρώμα του.

Παράδειγμα 15.2. *Ένα παράδειγμα μη αριθμητικής συνάρτησης.*



Σχήμα 2: Μία συνάρτηση που αντιστοιχεί κάθε σχήμα στο αντίστοιχο χρώμα του.

Η βασική προϋπόθεση που πρέπει να πληρεί μία αντιστοιχία για να αποτελεί συνάρτηση είναι να κάνει σαφείς αντιστοιχίσεις. Δηλαδή, να μην αντιστοιχεί ένα στοιχείο του πεδίου ορισμού της σε περισσότερα από ένα στοιχεία, ώστε να μπορούμε με σαφήνεια να αποφασίσουμε ποιο είναι το στοιχείο στο οποίο αντιστοιχίζεται το αρχικό δοσμένο στοιχείο.

Παράδειγμα 15.3. *15 Θεωρούμε ως πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f = [0,5] \subset \mathbb{R}$ και τον κανόνα f με τον οποίο κάθε αριθμός $x \in D_f$ αντιστοιχίζεται στο διπλάσιό του, δηλαδή: $f(2) = 2 \cdot 2 = 4$, δηλαδή στο $x = 2 \longrightarrow_f y = 4$. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης αυτής είναι όλοι οι αριθμοί στους οποίους η συνάρτηση αντιστοιχεί τους αριθμούς του πεδίου ορισμού της, δηλαδή οι $[0,10]$. Ο τύπος της συνάρτησης θα μπορούσε να γραφεί $y = f(x) = 2x, \ x \in [0,5]$.*

Σωτήρης Χασάπης
shasapis@gmail.com
www.arithmoi.gr

Παράδειγμα 15.4. *15 Ο κανόνας με τον οποίο κάθε $x \in A = [1, 2]$ αντιστοιχίζεται στον διπλάσιο ή στον αντίθετό του ΔΕΝ είναι συνάρτηση, διότι δεν αντιστοιχίζεται κάθε αριθμός του A σε έναν και μόνο αριθμό.*

Άσκηση 172. *15 Να εξεταστεί ποιες από τις επόμενες σχέσεις ορίζουν συνάρτηση του y ως προς x.*

i. $x^2 + y^2 = 1$

ii. $y = \pm\sqrt{(1 + x^2)}$

iii. $y = \frac{1}{x}$

iv. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

Άσκηση 173. *15 Να προσδιοριστεί η συνάρτηση που περιγράφει τη σχέση μεταξύ των εξαρτώμενων μεγεθών στις επόμενες περιπτώσεις:*

i. *Ένας εργάτης για να βάψει έναν τοίχο ζήτησε 50€ για τα υλικά και επιπλέον 5€ ανά τετραγωνικό μέτρο τοίχου. Να εκφραστεί το κόστος του βαψίματος ως συνάρτηση των τετραγωνικών μέτρων του τοίχου.*

ii. *Ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε τρίγωνο ΚΛΜ με βάση ΛΜ $= 10m$ και ύψος ΚΝ $= 5m$. Να εκφραστεί το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση του ύψους του.*

Άσκηση 174. *Να εξεταστεί αν ο αριθμός 24 είναι τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x + 7$.*

Άσκηση 175. *Δίνεται η συνάρτηση:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x > 1 \\ x^2 + 1 & x \leq 1 \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $A = f(0) + f(1) - f(f(-2)) + (f(2))^2$.

Άσκηση 176. *Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $h \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $f\left(\frac{3}{2} + h\right) = f\left(\frac{3}{2} - h\right)$*

Άσκηση 177. *Αν για τη συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + c$ ισχύουν: $f(1) = 2, f(0) = -1, f(2) = 1$ να υπολογιστούν τα a, b, c.*

Άσκηση 178. *Να βρεθούν οι παράμετροι $a, b \in \mathbb{R}$, ώστε η σχέση:*

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2bx - 4, & x \leq 1 \\ \frac{x^2 - a}{x + 1} - b & x \geq 1 \end{cases}$$

να είναι συνάρτηση με τη γραφική της παράσταση να τέμνει την ευθεία $x = 2$ στο σημείο με τεταγμένη $-\frac{1}{3}$.

15.3 Πεδίο ορισμού 1

Μία συνάρτηση περιγράφεται πλήρως όταν γνωρίζουμε όχι μόνο τη σχέση που συνδέει την εξαρτημένη και την ανεξάρτητη μεταβλητή, αλλά και σε ποιες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής εφαρμόζεται αυτή η σχέση, δηλαδή το πεδίο ορισμού της. Εξετάζουμε στη συνέχεια τα πεδία ορισμού βασικών συναρτήσεων. Το πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης μπορεί να προκύπτει ως υποσύνολο των πραγματικών αριθμών για δύο κυρίως λόγους: α) Από τη φύση της ίδιας της συνάρτησης (εγγενής λόγος), β) Από τη φύση του προβλήματος που περιγράφει ()

i. **Γραμμικές** $f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$ με $D_f = \mathbb{R}$

ii. **Πολυώνυμα** $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$ με $D_f = \mathbb{R}$

iii. **Ρητές** $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, με $D_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$

iv. **Άρρητες** $f(x) = \sqrt[k]{Q(x)}$ με $D_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \geq 0\}$

v. **Τριγωνομετρικές**

$f(x) = \eta\mu\,(Q(x))$ με $D_f = \{x \in \mathbb{R}\}$

$f(x) = \sigma\upsilon\nu\,(Q(x))$ με $D_f = \{x \in \mathbb{R}\}$

$f(x) = \epsilon\phi\,(Q(x))$ με $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$

$f(x) = \sigma\phi\,(Q(x))$ με $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi\}$

vi. **Λογαριθμικές** $f(x) = ln(Q(x))$ με $D_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) > 0\}$

vii. **Κλαδικές** $f(x) = \begin{cases} h(x), & x \in D_h \\ g(x), & x \in D_g \end{cases}$, τότε $D_f = D_h \bigcup D_g$.

Σε κάθε περίπτωση όπου εμφανίζονται περισσότερες της μίας περιπτώσεις από τις παραπάνω συναρτήσεων σε μία συνάρτηση ως αθροίσματα, διαφορές, κλπ., τότε το πεδίο ορισμού θα είναι η **τομή** των πεδίων ορισμού τους.

Παράδειγμα 15.5. *Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:*

$$f(x) = ln(x^2 - 5x + 6)$$

Πρέπει ό,τι βρίσκεται εντός του λογαρίθμου να είναι γνήσια θετικό, δηλαδή: $x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \bigcup (3, +\infty)$

Παράδειγμα 15.6. *Η συνάρτηση* $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ *έχει πεδίο ορισμού τους πραγματικούς αριθμούς, αφού αρκεί να ισχύει* $x^2 \geq 0$, *το οποίο ισχύει για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

Πολλές φορές όμως εξυπηρετεί, για τους υπολογισμούς, να την δούμε με τις ιδιότητες των δυνάμεων. Έτσι μπορεί να γραφεί $\sqrt[3]{x^2} = (x^2)^{\frac{1}{3}}$. *Η παραπάνω γραφή είναι καλή διότι οι δυνάμεις με ρητό εκθέτη ορίζονται για* $x \geq 0$ *και το* x^2 *το ικανοποιεί αυτό.*

Αν όμως θελήσουμε να την γράψουμε, από τις ιδιότητες των δυνάμεων, ως $x^{\frac{2}{3}}$ *τότε πρέπει να προσέξουμε ότι εφόσον οι δυνάμεις με ρητό εκθέτη ορίζονται μόνο για μη αρνητικούς αριθμούς πρέπει* $x \geq 0$. *Επειδή, λοιπόν, στην* $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ *ήταν* $x \in \mathbb{R}$ *θα έχουμε ότι* $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = (x^2)^{\frac{1}{3}} = |x|^{\frac{2}{3}} = \begin{cases} x^{\frac{2}{3}}, & x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{2}{3}}, & x < 0 \end{cases}$.

Συνεπώς, «φροντίζουμε» στη βάση του ρητού εκθέτη να έχουμε πάντα μη αρνητικούς αριθμούς.

Άσκηση 179. *Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:*

i. $f_1(x) = \sqrt{ln\left(\frac{-x^2+4x}{4}\right)}$

ii. $f_2(x) = x^2 - 4x + 3$

iii. $f_3(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+1}}$

iv. $f_4(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}$

v. $f_5(x) = \frac{1}{ln(x^2-4x+3)}$

vi. $f_6(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{ln(-x+1)}$

vii. $f_7(x) = \frac{ax+1}{x-a}, a \in \mathbb{R}$

viii. $f_8(x) = x^3 - x^2 + x + 2$

ix. $f_9(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x....? \\ \sqrt{1-x}, & x.....? \end{cases}$

x. $f_{10}(x) = \frac{x^2-25}{x^2+5|x|}$

Άσκηση 180. *Δίνεται ο τύπος:* $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < a \\ x-2, & x \geq 3-a \end{cases}$. *Να βρεθούν οι τιμές του* a, *ώστε ο παραπάνω τύπος να παριστάνει συνάρτηση και στη συνέχεια να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.*

Άσκηση 181. *Αν σε κάθε ρητό αριθμό* $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ *αντιστοιχίζεται ο αριθμός* $a \cdot b$, *να εξεταστεί αν ορίζεται συνάρτηση με αυτήν την αντιστοιχία.*

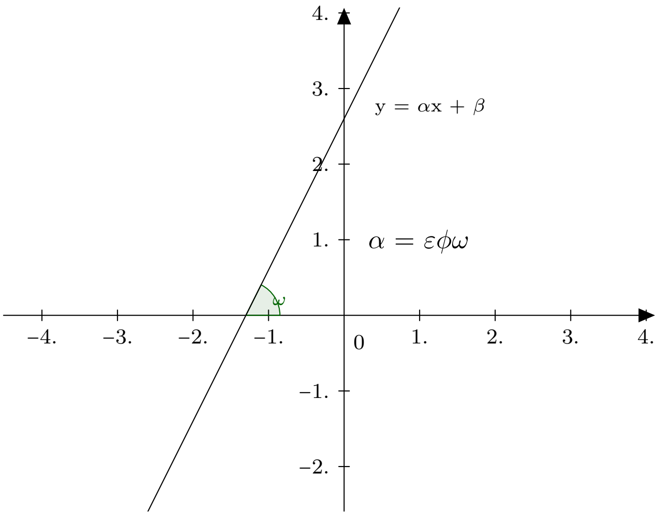
Άσκηση 182. *Να βρεθούν οιτ ιμές του* $a \in \mathbb{R}$ *ώστε η συνάρτηση* $f(x) = \frac{1+x}{ax^2-2ax+2a+1}$ *να έχει πεδίο ορισμού το* $\mathbb{R}$.

Άσκηση 183. *Να βρεθεί το* $k \in \mathbb{R}$ *ώστε η συνάρτηση* $f(x) = \sqrt{(3-k)x^2 - 2kx - k - 1}$ *να έχει πεδίο ορισμού το* $\mathbb{R}$.

15.4 Βασικές Συναρτήσεις και ιδιότητες - Γραφική Παράσταση

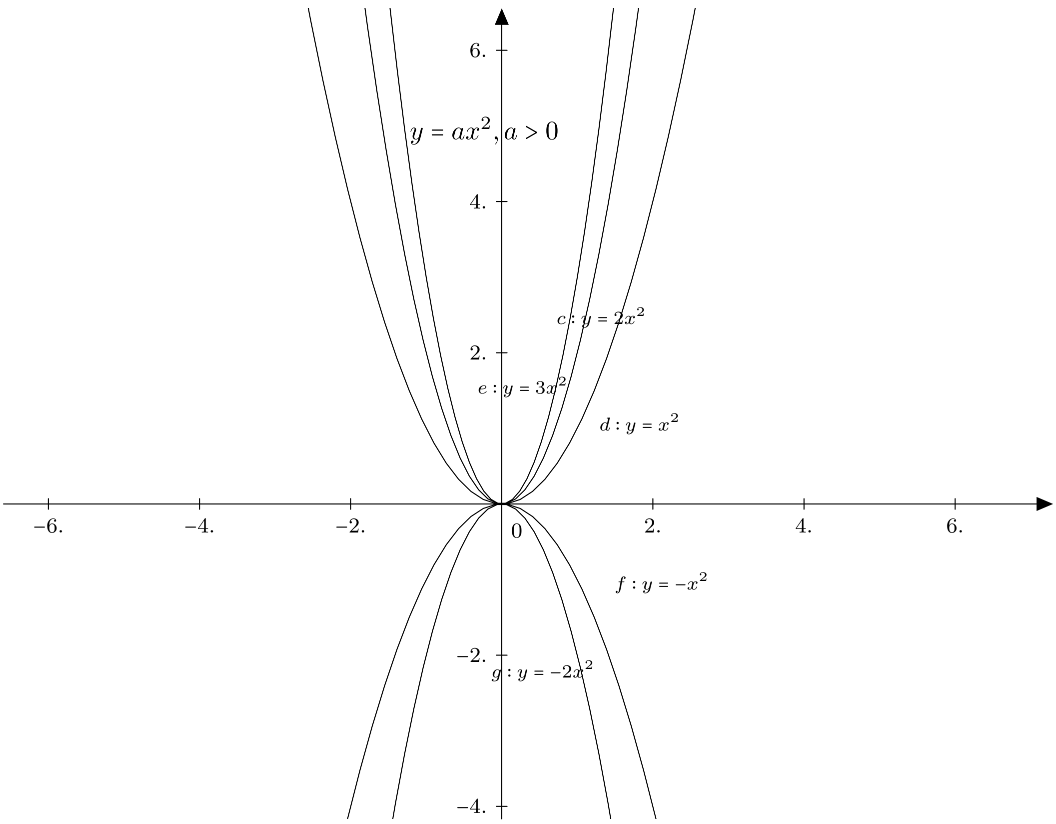
Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης είναι η αποτύπωση των ζευγών αριθμών (x, y) σε ένα σύστημα ορθοκανονικών αξόνων. Παρακάτω εμφανίζονται οι γραφικές παραστάσεις βασικών γνωστών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 15.7 (Η γραμμική συνάρτηση - Ευθεία)**.**



ΠΡΟΣΟΧΗ: Η κατακόρυφη ευθεία $x = x_0, x_0 \in \mathbb{R}$ ΔΕΝ είναι συνάρτηση.

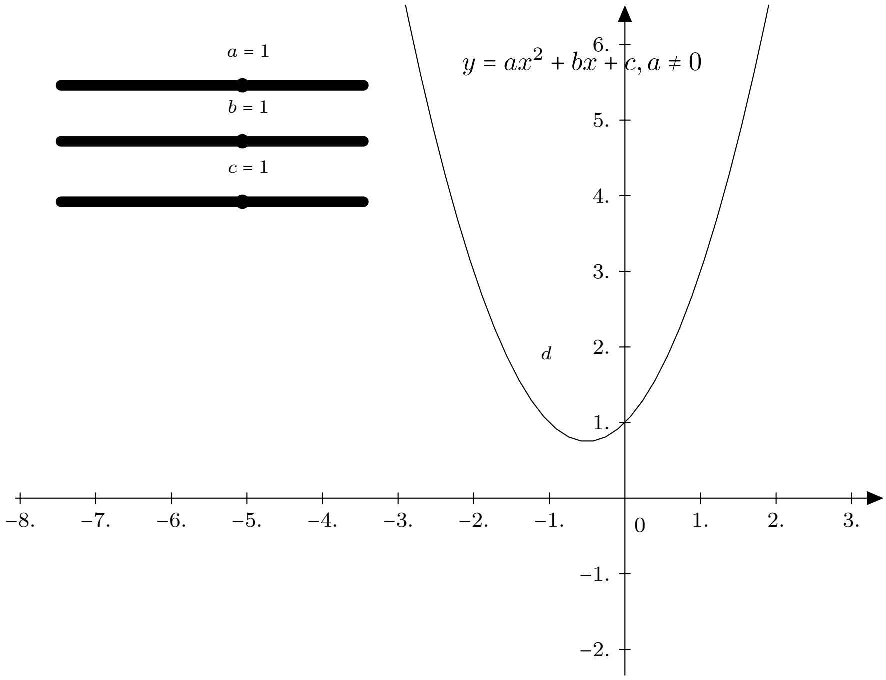
Παράδειγμα 15.8 (Η συνάρτηση παραβολή $y = ax^2$)**.**



Η παραβολή $y = ax^2, a \neq 0$ «κλείνει» όσο μεγαλύτερο κατ΄ απόλυτη τιμή είναι το a.

Άσκηση 184. *Να εξεταστεί αν η παραβολή $y^2 = 2px, p \neq 0$ και η παραβολή $x^2 = 2py, p \neq 0$ είναι συναρτήσεις.*

Παράδειγμα 15.9 (Η μετατοπισμένη συνάρτηση-παραβολή $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$)**.**

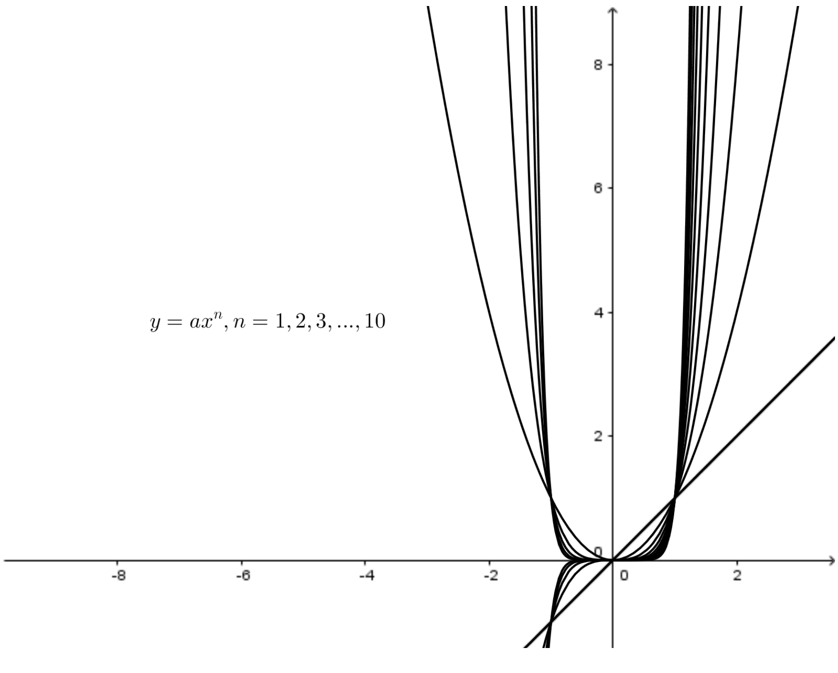


Η συνάρτηση παραβολή για $a > 0$ έχει τα κοίλα προς τα πάνω και λαμβάνει ελάχιστη τιμή για $x = \frac{-b}{2a}$, ενώ για $a < 0$ έχει τα κοίλα προς τα κάτω και λαμβάνει μέγιστη τιμή για $x = \frac{-b}{2a}$. Για αντίθετες τιμές του a οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 185. *Να βρεθεί η εξίσωση του άξονα συμμετρίας της γραφικής παράστασης της παραβολής $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.*

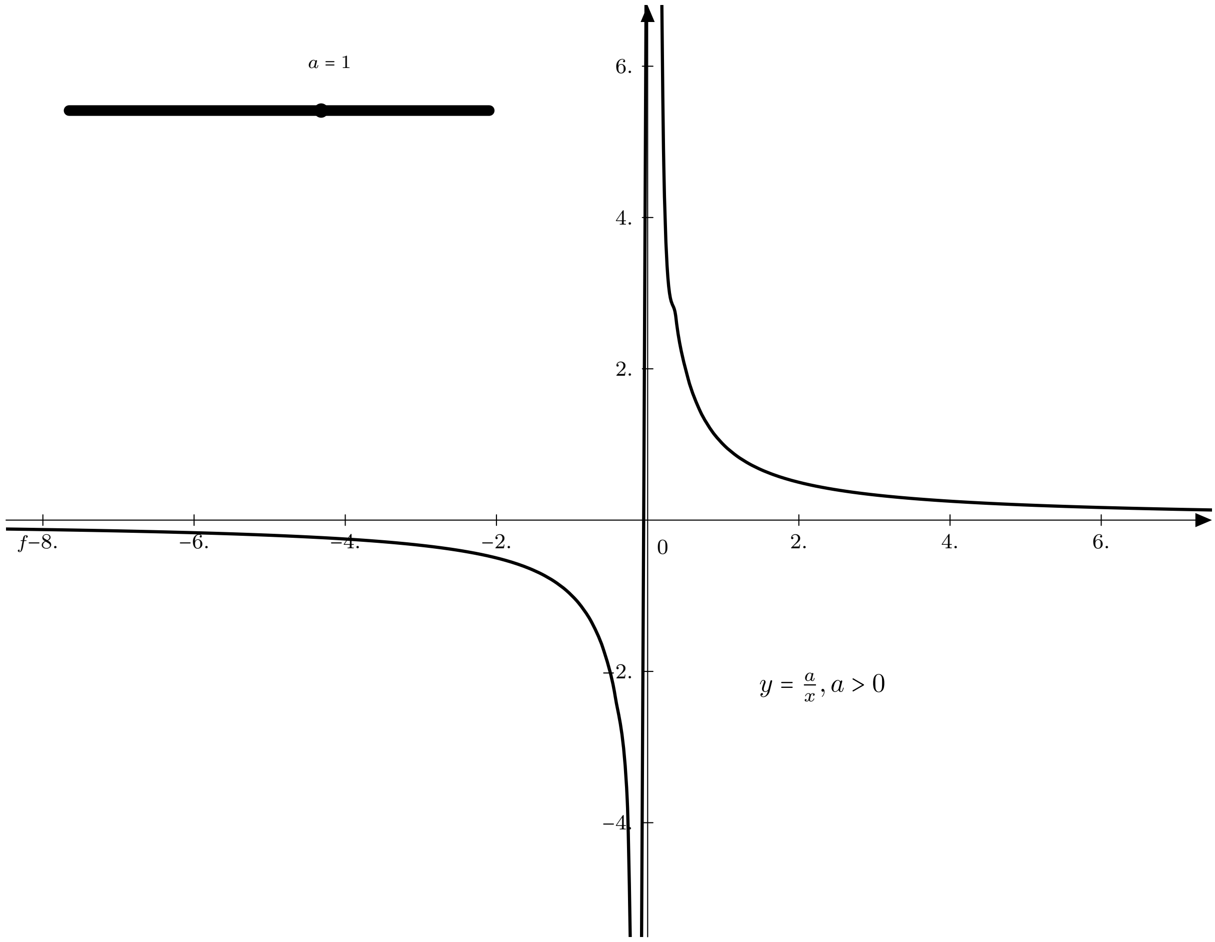
Άσκηση 186. *Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = f(x)$ και $y = -f(x)$ για $x \in A$ είναι συμμετρικές με άξονα συμμετρίας τον $x'x$.*

Παράδειγμα 15.10 (Η πολυωνυμική συνάρτηση $y = ax^n, a > 0, n = 1, 2, \ldots, 10$)**.** *Η συνάρτηση είναι μεγαλύτερη ίση του 0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όταν n άρτιος, ενώ αλλάζει πρόσημο όταν n περιττός.*



Σχήμα 3: Η πολυωνυμική συνάρτηση $y = x^n$.

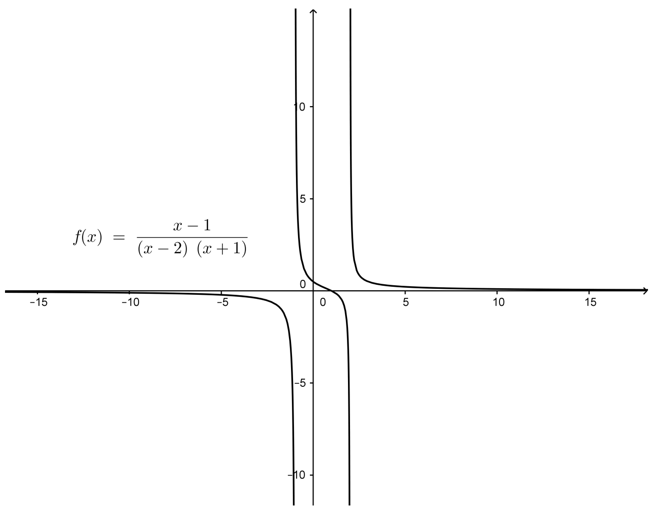
Παράδειγμα 15.11 (Η συνάρτηση υπερβολή $y = \frac{a}{x}, a \neq 0$)**.**



Για $a > 0$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο, ενώ για $a < 0$ βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

Παρατήρηση: Και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει **ασύμπτωτες** τους άξονες $x'x, y'y$. Μία ευθεία είναι ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης αν οι γραφικές τους παραστάσεις πλησιάζουν διαρκώς καθώς το χ μεγαλώνει κατ΄ απόλυτη τιμή ή πλησιάζει πολύ κοντά σε μία τιμή.

Παράδειγμα 15.12 (Ρητές συναρτήσεις)**.** *Μία συνάρτηση λέγεται **ρητή** αν είναι πηλίκο δύο πολυωνύμων.*

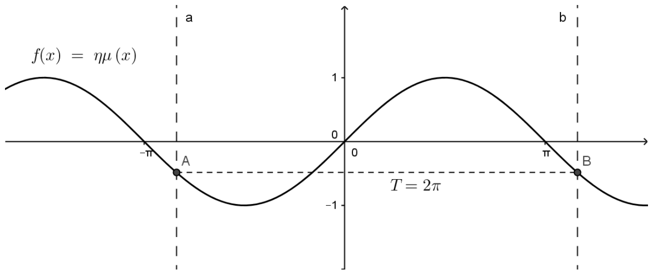


Σχήμα 4: Μία ρητή συνάρτηση με δύο ρίζες στον παρονομαστή.

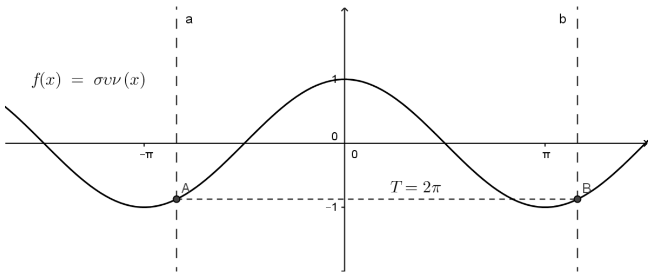
Παράδειγμα 15.13 (Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις)**.** *Οι τριγωνομετρικές συ-*

Σωτήρης Χασάπης
shasapis@gmail.com
www.arithmoi.gr

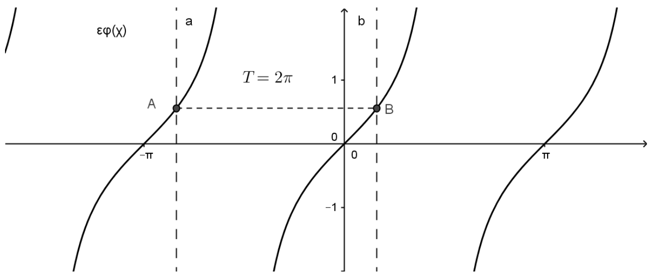
ναρτήσεις είναι ***περιοδικές****, δηλαδή αν $T \in \mathbb{R}$ η περίοδός τους τότε ισχύει:* $f(x \pm T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$



Σχῆμα 5: Η συνάρτηση ημχ με περίοδο 2π. Οι τετμημένες των σημείων Α και Β διαφέρουν κατά 2π και η συνάρτηση δίνει τις ίδιες τιμές.



Σχῆμα 6: Η συνάρτηση συνχ με περίοδο 2π. Οι τετμημένες των σημείων Α και Β διαφέρουν κατά 2π και η συνάρτηση δίνει τις ίδιες τιμές.



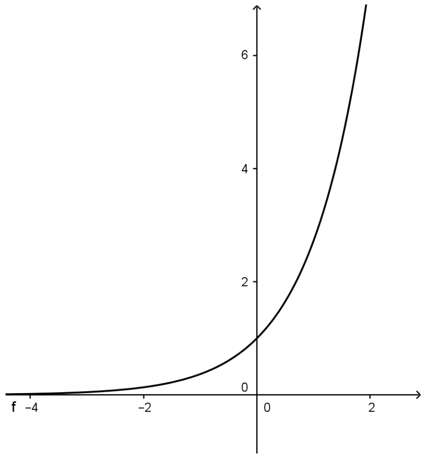
Σχῆμα 7: Η συνάρτηση εφχ με περίοδο π. Οι τετμημένες των σημείων Α και Β διαφέρουν κατά π και η συνάρτηση δίνει τις ίδιες τιμές.

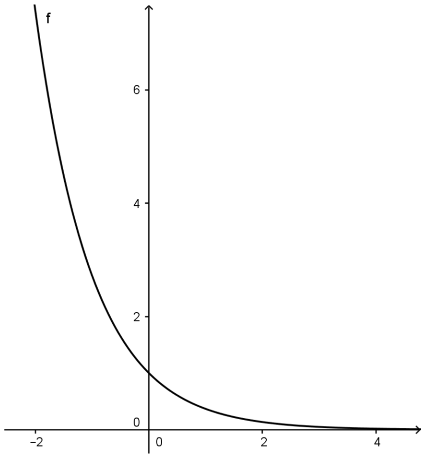
Παράδειγμα 15.14 (Εκθετική Συνάρτηση $f(x) = a^x$)**.** *Η Εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0, a \neq 1$ για $a < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ για $a > 1$ είναι γνησίως αύξουσα. Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της e^x και της 10^x.*

Στον παρακάτω πίνακα θυμόμαστε κάποιες βασικές ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = a^x, a \neq 1$.

$0 < a < 1$	$a > 0$
$D_f = \mathbb{R}$	$D_f = \mathbb{R}$
$a^x > 0$	$a^x > 0$
Γνησίως φθίνουσα	Γνησίως αύξουσα
$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$	$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$
Αλλάζει τη φορά των ανισώσεων	Διατηρεί τη φορά των ανισώσεων

Παράδειγμα 15.15 (Λογαριθμική Συνάρτηση $f(x) = log_a(x)$, $0 < a \neq 1$)**.** *Μερικές βασικές ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης είναι οι παρακάτω με την προϋπόθεση ότι όλες οι ποσότητες που εμφανίζονται ορίζονται καλά:*





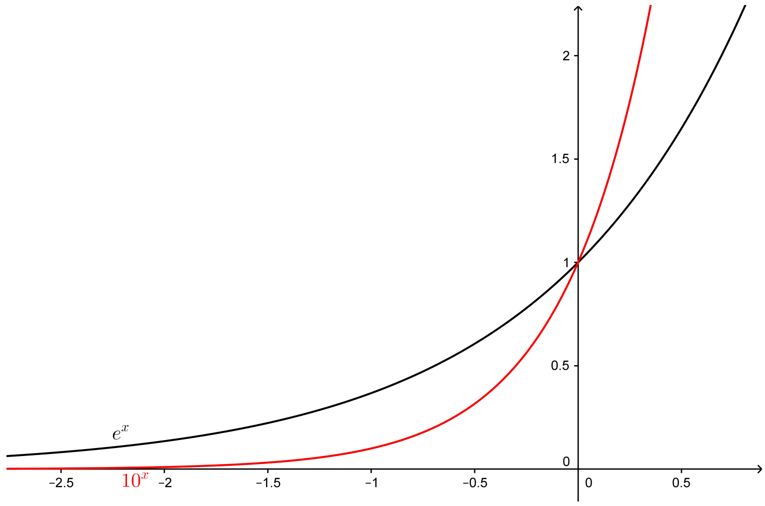
$$a^k = x \Leftrightarrow log_a x = k$$

$$log_a a = 1 \qquad log_a 1 = 0 \qquad log_a a^x = x$$

$$log_a(x \cdot y) = log_a x + log_a y$$

$$a^{log_a x} = x \qquad log_a x^k = k log_a x$$

$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y$$



Σχήμα 8: Η συνάρτηση 10^x μεταβάλλεται γρηγορότερα της e^x για $x > 0$. Είναι και οι δύο εκθετικές με βάση μεγαλύτερη της μονάδας, οπότε γνησίως αύξουσες.

Παρατήρηση 1. *Στην πραγματικότητα μεταβάλλεται ταχύτερα ήδη από κάποιο* $-1 < x_0 < -1/2$

Άσκηση 187. *[Μπάρλας] Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης* $f(x) = kln(x+1) + m$ *τέμνει τον άξονα* $x'x$ *στο σημείο* $e^2 - 1$ *και τον άξονα* $y'y$ *στο 2, τότε να βρεθούν οι παράμετροι* k, m *και το σημείο της γραφικής παράστασης με τεταγμένη 3.*

Άσκηση 188. *Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις όλων των συναρτήσεων* $f_a(x) = (a-1)x^2 - 2ax + 1 - 3a$ *για τις διάφορες τιμές του* $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ *διέρχονται από δύο σταθερά σημεία τα οποία και να προσδιοριστούν.*

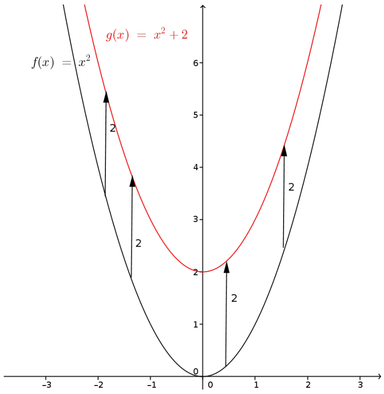
15.4.1 Σχετικές Θέσεις Γραφικών παραστάσεων

Άσκηση 189. *Να εξεταστεί αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης* $f(x) = a^2 + \sqrt{x^2 + a^2}$ *έχει κοινά σημεία με τους άξονες για τις διάφορες τιμές του* $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

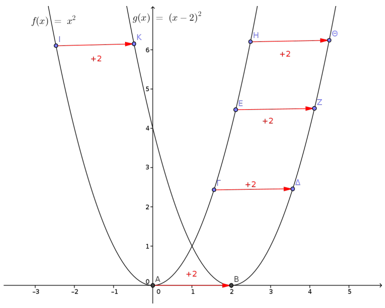
Άσκηση 190. *Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων* $f(x) = ax^2 - x + 1,\ g(x) = 2ax - 1$ *για τις διάφορες τιμές του* $a \in \mathbb{R}$.

15.4.2 Μετατοπίσεις γραφικών παραστάσεων

Από τις βασικές συναρτήσεις που περιγράφηκαν στα προηγούμενα είναι δυνατόν να οδηγηθούμε σε νέες συναρτήσεις με μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης των αρχικών συναρτήσεων. Αυτές μπορούν να γίνουν κατά δύο τρόπους με παράλληλη μετατόπιση προς τον άξονα $x'x$, δηλαδή με μετατόπιση «δεξιά-αριστερά», είτε με παράλληλη μετατόπιση στον άξονα $y'y$, δηλαδή «πάνω - κάτω».



Σχήμα 9: Το +2 στον τύπο της $g(x)$ μετατοπίζει τη γραφική παράσταση της f κατά δύο μονάδες προς τα πάνω.



Σχήμα 10: Η αντικατάσταση του x με το $x-2$ στον τύπο της $f(x)$ μετατοπίζει τη γραφική παράσταση της f κατά δύο μονάδες προς τα **δεξιά**.

Άσκηση 191. *Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων (αφού βρεθεί το πεδίο ορισμού τους):*

i. $f_1(x) = 2\eta\mu(x)$

ii. $f_2(x) = 3\sigma\upsilon\nu(x-1)$

iii. $f_3(x) = \sqrt{x-1}, g(x) = -\sqrt{x-1}$

iv. $f_4(x) = 2^x, g(x) = 3^x$

v. $f_5(x) = \sqrt{x^2+4}$

vi. $f_6(x) = \ln(x), g(x) = \log(x)$

vii. $f_7(x) = \ln(|x|), g(x) = ln(x^2)$

viii. $f_8(x) = |x-2| + |x+3|$

ix. $f_9(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$

x. $f_{10}(x) = \frac{|x|}{x+|x|}$

Άσκηση 192. *Μετασχηματίζοντας κατάλληλα τον τύπο της συνάρτησης* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *και μετατοπίζοντας τη γραφική της παράσταση να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης* $g(x) = \frac{x+5}{x+3}$.

15.4.3 Συμμετρίες γραφικών παραστάσεων

Ορισμός 3 (Άρτια συνάρτηση). *Μία συνάρτηση f λέγεται* **άρτια** *αν για κάθε $x \in D_f$ ισχύουν:*

i. $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$.

ii. $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$.

Η γραφική παράσταση μίας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Άλγεβρα Β΄ λυκείου

Ορισμός 4 (Περιττή Συνάρτηση). *Μία συνάρτηση f λέγεται* **περιττή** *αν για κάθε $x \in D_f$ ισχύουν:*

i. $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$.

ii. $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$.

Η γραφική παράσταση μίας άρτιας συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Μαθηματικά Α΄ γυμνασίου

Παράδειγμα 15.16. *Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:*

$$f(2y + x) = 4f(y) + f(x) + 4xy$$

Να αποδειχθεί ότι η f είναι άρτια συνάρτηση.

Λύση. Καταρχάς για κάθε $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$. Η δοσμένη σχέση ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Οπότε αντικαθιστώντας x με y και αντίστροφα στη δοθείσα έχουμε τη σχέση:

$$f(2x + y) = 4f(x) + f(y) + 4xy$$

και αφαιρώντας αυτήν από την αρχική έχουμε:

$$\begin{aligned} f(2x+y) - f(2y+x) &= 3(f(x) + f(y)),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ giay = -xf(x) - f(-x) &= 3f(x) + 3f(-x),\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ f(x) &= f(-x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Συνεπώς f άρτια. □

Άσκηση 193. *Να εξεταστεί αν μία συνάρτηση μπορεί να είναι άρτια και περιττή ταυτόχρονα: α) Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική ερμηνεία των εννοιών και β) χρησιμοποιώντας τους αλγεβρικούς ορισμούς των εννοιών.*

Σωτήρης Χασάπης
shasapis@gmail.com
www.arithmoi.gr