Ομαδικοί Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Σωτήρης Δ. Χασάπης

Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο
Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

shasapis@sch.gr
http://users.sch.gr/shasapis

Περίληψη Η παρούσα εισήγηση αποτελεί ουσιαστικά μία πρόσκληση – πρόταση για τη διοργάνωση ενός πανελλήνιου διαγωνισμού Μαθηματικών προς τους συναδέλφους των Π.Π.Σ. και άλλων ενδιαφερόμενων σχολείων ή φορέων. Η ιδιαιτερότητα της πρότασης αφορά στην ομαδική συνεργασία που προτείνεται για αυτόν τον διαγωνισμό μεταξύ των μαθητών, καθώς επίσης και η προσθήκη δραστηριοτήτων πέραν αυτών της επίλυσης προβλημάτων ατομικά ενός κλασικού μαθηματικού διαγωνισμού. Ο συναγωνισμός που τόσο καλά αναπτύσσεται και συντείνει στην πλήρη ανέλιξη των μαθητών μας πρέπει να συνεπικουρείται και από την ανάπτυξη συνεργατικών δεσμών μεταξύ τους, ώστε να επιτευχθεί μία όσο το δυνατόν πληρέστερη γνωστική και κοινωνική εξέλιξη της προσωπικότητάς τους, που θα ωθήσει στη μετεξέλιξη των μαθητών σε άρτιους επιστήμονες. Η αριστεία δεν μπορεί να βασίζεται μόνο σε γνωστικούς, καλλιτεχνικούς ή άλλους παράγοντες δεξιοτήτων, χωρίς σε αυτήν να περιλαμβάνεται και ανάπτυξη της ικανότητας λειτουργίας ως μέλους μίας ομάδας προς επίτευξη ενός υψηλού στόχου. Ειδικά, όσον αφορά στην Ελληνική πραγματικότητα, όπου είναι δεδομένη η έλλειψη μίας παρόμοιας κουλτούρας συνεργασίας αποτελεί ουσιαστική ανάγκη.

Λέξεις κλειδιά : Μαθηματικοί διαγωνισμοί, ομαδικοί μαθηματικοί διαγωνισμοί, αριστεία, ταλαντούχοι μαθητές, συνεργασία, έρευνα, επίλυση προβλήματος, σχολικά μαθηματικά.

Εισαγωγή

Γενικά, σε πολλές χώρες υπάρχουν πολλών ειδών μαθηματικοί διαγωνισμοί, όπως: ενδοσχολικοί, μεταξύ ομάδων σχολείων, περιφερειακοί, εθνικοί, διεθνείς, τελευταία ομαδικοί κ.ά. Υπάρχουν έρευνες που συμπεραίνουν ότι η ανταγωνιστική προσέγγιση στη γνώση δρα θετικά και οδηγεί στην επίτευξη υψηλότερων στόχων, αλλά και άλλες οι οποίες οδηγούν σε αντίθετα συμπεράσματα Trasher (2008)[24]. Ακόμα και ειδικοί επί του θέματος έχουν διιστάμενες απόψεις. Υπάρχει όμως ένα πλαίσιο, όπου εντάσσονται μερικά κοινά χαρακτηριστικά όλων. Καταρχάς, οι διαγωνισμοί είναι απαραίτητοι για κάθε εκπαιδευτικό σύστημα, διότι βοηθούν τους διαγωνιζόμενους να θέτουν υψηλούς στόχους, άρα να μαθαίνουν να κυνηγούν την πρόοδο. Επίσης, παρέχουν ουσιαστικές δραστηριότητες στους χαρισματικούς μαθητές ή τους υψηλής ικανότητας στα Μαθηματικά μαθητές, οι οποίοι πλέον με τον τρόπο επιλογής με εξετάσεις εμφανίζονται σε μεγαλύτερη συχνότητα στα Π.Π.Σ. Ωθούν αρκετούς από τους καλύτερους στα Μαθηματικά μαθητές στην ενασχόλησή τους με τις επιστήμες. Από την άλλη πλευρά, μία διαρκώς ανταγωνιστική προσέγγιση μπορεί να οδηγήσει και σε δυσλειτουργίες, οι οποίες μπορούν να εκτείνονται από έναν απλό κορεσμό για τα μαθηματικά προβλήματα έως και περιορισμό της δημιουργικότητας των μαθητών. Ακόμα, η επιστημονική έρευνα, σύμφωνα με επαγγελματίες ερευνητές, απαιτεί και άλλα χαρακτηριστικά τα οποία δεν υπεισέρχονται σε όλους τους μαθηματικούς διαγωνισμούς. Τέτοια είναι η δυνατότητα έκφρασης της δημιουργικότητας του ερευνητή ως μέλους μίας ομάδας, δηλαδή η συνεργασία μέσα από τους κανόνες μίας ομάδας, αλλά και η διερεύνηση και η ικανότητα δημιουργίας και μετατροπής προβλημάτων. Όλα τα προηγούμενα, σύμφωνα με τη Γνωστική Ψυχολογία, είναι κατάλληλο να αναπτύσσονται ήδη σε μικρές ηλικίες, όπως είναι οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με κατάλληλες κάθε φορά δραστηριότητες, οι οποίες να αποτελούν και παράγοντες διασκέδασης και αναγνώρισης της ομορφιάς στην επίλυση ενός προβλήματος μαθηματικών.

Στη διεθνή πρακτική, διοργανώνονται τα τελευταία 10 χρόνια αρκετοί μαθηματικοί διαγωνισμοί που διαθέτουν αυτά τα χαρακτηριστικά, ενώ άλλοι ομαδικοί διαγωνισμοί που υπάρχουν από τη δεκαετία του 80 εντάσσουν αρκετά από αυτά.

Στην παρούσα εισήγηση αναλύονται οι ομοιότητες και διαφορές ερευνητικών και διαγωνιστικών μαθηματικών, εξετάζονται τα χαρακτηριστικά που συμπληρώνουν έναν ομαδικό μαθηματικό διαγωνισμό και προτείνονται μερικές δραστηριότητες, οι οποίες είτε υπάρχουν σε μερικούς από τους διαγωνισμούς που παρουσιάζονται συνοπτικά, είτε αποτελούν νέες προτάσεις.

Μία συνολική θεώρηση των διαγωνισμών

Μερικά από τα πλεονεκτήματα των μαθηματικών διαγωνισμών, όπως αυτά αναγνωρίζονται από τους Siu(2013)[21], Zawaira(2007)[30], Toh(2012)[26], Bricknel(2008)[1], Kenderov(2006)[9], Trasher(2008)[24] κ.ά. αποτελούν μία σημαντική πρόκληση, τόσο για τους δασκάλους, όσο και για τους μαθητές. Επιπλέον για τους μαθητές δημιουργούνται κίνητρα, είναι ευκαιρία για την ενεργή συμμετοχή τους, για να αναλαμβάνουν πρωτοβουλίες μόνοι τους, να καλλιεργήσουν την υπομονή και την επιμονή τους (ένα πρόβλημα μπορεί να χρειαστεί παραπάνω από μιάμιση ώρα για να λυθεί σε ένα διαγωνισμό), μαθαίνουν στους μαθητές να εκφράζουν τις λύσεις τους, πλήρεις ή μη, καθαρά και με λογική δομή, ωθούν στην αναζήτηση επιπλέον λύσεων ή της καλύτερης λύσης και αποτελούν μία καλή ευκαιρία για να αναγνωριστούν οι καλύτεροι λύτες προβλημάτων. Επίσης, αποτελούν αφορμή για τη μελέτη μη συνηθισμένων προβλημάτων εκτός του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών και εμπλουτισμού του προγράμματος Μαθηματικών για ταλαντούχους μαθητές, όπως προβλέπεται σε πολλές χώρες, οι οποίοι εξάλλου μπορεί να αποκαλυφθούν μέσα από τους ίδιους τους διαγωνισμούς. Τέλος, μπορεί να προωθούν την ομαδική εργασία και τον ενθουσιασμό για τα μαθηματικά προβλήματα.

Οι διαγωνισμοί είναι μία από τις αναγκαίες προβλέψεις που πρέπει να υπάρχει στα Π.Π.Σ. για τους μαθητές τους, αφού μεταξύ αυτών και λόγω και των εξετάσεων εισαγωγής είναι πολύ πιθανό να βρεθούν και μαθηματικά προικισμένοι μαθητές και σύμφωνα με τη Bricknel(2008) [1] μία από τις προβλέψεις που πρέπει να λαμβάνονται μεταξύ άλλων είναι και η διεξαγωγή και συμμετοχή σε διαγωνισμούς. Ο στόχος είναι διττός: αφενός να ανιχνευθούν πιθανά μαθηματικά ταλέντα, αφετέρου να ενισχυθεί και εμπλουτισθεί το πρόγραμμα σπουδών των μαθητών, κάτι που είναι αναγκαίο για αυτούς τους ταλαντούχους μαθητές Kalman(2002) [8].

Διαγωνισμοί, επιστήμη, έρευνα

Ένα από τα αναφερόμενα πλεονεκτήματα και από τις βασικές επιδιώξεις των μαθηματικών διαγωνισμών Kenderov(2006) [9] αποτελεί και η έλξη – μετά την αναγνώριση – μαθηματικά ταλαντούχων μαθητών για επαγγελματική σταδιοδρομία στις επιστήμες και την έρευνα. Παρότι, όπως διαφαίνεται παρακάτω, υπάρχουν διαφορετικές απόψεις ως προς τη συσχέτιση επιτυχόντων σε μαθηματικούς διαγωνισμούς και επιτυχημένων ερευνητών, δεν αμφισβητείται ότι κάποια κύρια χαρακτηριστικά ορισμένων σωστά δομημένων διαγωνισμών είναι εξαιρετικά χρήσιμα και σε μία περαιτέρω πορεία στην έρευνα.

Ένας από τους σημαντικότερους επιστήμονες που επηρεάστηκε και αναγνώρισε νωρίς (1929) την αξία των διαγωνισμών για την ώθηση νέων επιστημόνων, ο John von Neumann, που γεννήθηκε στην Ουγγαρία, έγραψε προς έναν καθηγητή του:

...είχα την ευκαιρία αρκετές φορές να μιλήσω στον Leo Szilard για τους μαθητικούς διαγωνισμούς της Ένωσης Μαθηματικών και φυσικών επιστημών Eotvos, για το γεγονός ότι οι νικητές των διαγωνισμών της γίνονται, μεταξύ των μαθηματικών και φυσικών, υψηλά αναγνωρισμένοι επιστήμονες. Λαμβάνοντας υπόψη τη γενικότερα κακή φήμη των εξετάσεων παγκοσμίως νομίζω ότι μπορεί να θεωρηθεί τεράστιο επίτευγμα ότι η επιλογή αυτή έχει λειτουργήσει με 50% επιτυχία στη διάγνωση των μαθηματικά ταλαντούχων μαθητών...

Συχνά, η μελλοντική επαγγελματική πραγματικότητα ενός νέου ανθρώπου προκαθορίζεται από την *πρώτη επιτυχία*. Έτσι, κάποιος που έχει ενδιαφέρον για τα μαθηματικά και επιδείξει επιτυχία σε αυτά, μέσα από δουλειά και κόπο αποκτά ένα ισχυρό κίνητρο για να συνεχίσει. Οπότε οι μαθηματικοί διαγωνισμοί μπορούν να αποτελέσουν μέσο προσέλκυσης νέων ικανών «μυαλών» σε μαθηματικά και επιστήμες γενικότερα. Για παράδειγμα, η Ουγγαρία είναι μία χώρα που έχει παράξει πολλούς, αναλογικά με τον πληθυσμό της, σημαντικούς μαθηματικούς τα τελευταία τουλάχιστον 100 έτη και έχει μακρά ιστορία στους μαθηματικούς διαγωνισμούς, τόσο σε επιτυχίες, όσο και όσον αφορά την ένταξή τους στο εκπαιδευτικό της σύστημα Zawaira(2009)[30]. Ο Terence Tao [22], αναφέρει ότι διασκέδασε ιδιαίτερα με τις εμπειρίες του από τους σχολικούς μαθηματικούς διαγωνισμούς τη δεκαετία του '80 και όπως σε κάθε άλλο σχολικό αθλητικό γεγονός υπάρχει ένα υψηλό επίπεδο συγκίνησης στη συμμετοχή με άλλους μαθητές παρομοίων ενδιαφερόντων σε μία διαγωνιστική δραστηριότητα. Επιπλέον, οι μαθηματικοί διαγωνισμοί παρουσιάζουν και τα μαθηματικά που δεν είναι μόνο για βαθμούς και εξετάσεις. Εντούτοις, οι μαθηματικοί διαγωνισμοί κατά τη γνώμη του, αποτελούν πολύ διαφορετικές δραστηριότητες τόσο σε σχέση με τη μάθηση στα Μαθηματικά, όσο και με τη μαθηματική έρευνα. Τελικά, κατά τον Tao, τα Μαθηματικά των διαγωνισμών είναι εγγύτερα προς την έρευνα από τα σχολικά Μαθηματικά. Αν μάλιστα, ταυτίζονταν λιγότερο με τη έννοια της *μαθηματικής ευφυίας* Lesswrong [10] - κάτι που φαίνεται να συμβαίνει τα τελευταία χρόνια στην Ελλάδα, αν κρίνουμε από την αύξηση των συμμετοχών στους διαγωνισμούς της Ε.Μ.Ε. - τότε θα ήταν και περισσότερα τα οφέλη για την επιστήμη. Κατά τον Goro Shimura, στο Lesswrong [10], πολλά από τα προβλήματα που εμφανίζονται σε διάφορες εξεταστικές διαδικασίες είναι τεχνητά και απαιτούν μερικά έξυπνα τεχνάσματα. Έτσι, στη διδασκαλία του απέφευγε τέτοιου είδους προβλήματα, αφού κατά την άποψή του οι νέοι που ενδιαφέρονται σοβαρά για τα μαθηματικά δεν έχουν τίποτα να χάσουν από αυτά. Επίσης, ο Andrew Wiles ισχυρίστηκε σε διάλεξή του το 2001, στο Lesswrong[10], ότι οι μαθηματικοί διαγωνισμοί και τα προβλήματά τους στις περισσότερες περιπτώσεις δεν ανταποκρίνονται στη μαθηματική πρακτική. Μία ουσιαστική διαφορά, κατά τον Wiles, όπως έχει αναφερθεί και αλλού στο παρόν κείμενο, είναι ότι η δημιουργία νέων μαθηματικών έχει τη δυσκολία ότι δεν γνωρίζεις τι ακριβώς προσπαθείς να αποδείξεις ή ακόμα χειρότερα αν αυτό είναι αληθές, σε αντίθεση με τα προβλήματα των περισσότερων μαθηματικών διαγωνισμών, όπου είναι δεδομένη η ύπαρξη λύσης, καθώς επίσης και η ανελαστικότητα, ως προς τη μεταβολή των δεδομένων και των ζητούμενων του προβλήματος. Ο William Thurston, βραβευμένος με το μετάλλιο Fields, γράφει στο Thurston(1990) [25]:

...οι διαγωνισμοί είναι διασκεδαστικοί, ενδιαφέροντες και διδακτικά αποτελεσματικοί για τους ανθρώπους που είναι επιτυχημένοι σε αυτούς. Όμως υπάρχει και η άλλη πλευρά, όπου αναγκάζουν τους συμμετέχοντες να ενταχθούν είτε στην κατηγορία των μαθηματικά ταλαντούχων, είτε των λιγότερο ταλαντούχων. Επίσης, δίνουν έμφαση στην ταχύτητα, εις βάρος της βαθιάς σκέψης. Δίνουν έμφαση σε προβλήματα – γρίφους με κάποιο κρυμμένο τέχνασμα, παρά σε πιο πραγματικά προβλήματα, στα οποία μία συστηματικότερη και επίμονη προσέγγιση είναι σημαντικότερη. Αυτό αποθαρρύνει πολλούς ανθρώπους, οι οποίοι δεν είναι τόσο γρήγοροι ή αρκετά προετοιμασμένοι, αλλά ενδεχομένως θα μπορούσαν να είναι εξαιρετικά αποτελεσματικοί αν δούλευαν σε προβλήματα χωρίς την πίεση του χρόνου. Μερικοί από τους καλύτερους των μαθηματικών διαγωνισμών γίνονται επίσης καλοί μαθηματικοί, αλλά υπάρχουν επίσης πολλοί καλοί μαθηματικοί, οι οποίοι δεν υπήρξαν αντίστοιχα επιτυχημένοι σε μαθηματικούς διαγωνισμούς. Η ταχύτητα είναι βοηθητική στα μαθηματικά, αλλά αποτελεί μόνο έναν από τους παράγοντες που συνεισφέρουν.

Ο Timothy Gowers, επίσης βραβευμένος με το μετάλλιο Fields, στο βιβλίο του Gowers(2002) [7], γράφει:

...η αρνητική επίδραση που έχει η λέξη **ταλαντούχος-ιδιοφυία**, είναι τεράστια. Όταν γράφω ιδιοφυία εννοώ κάποιον, ο οποίος μπορεί να κάνει εύκολα, σε μικρή ηλικία, κάτι που σχεδόν κανένας άλλος δεν μπορεί να κάνει εκτός μετά από πολλά χρόνια εξάσκησης και αν μπορεί και τότε. Τα επιτεύγματα των ιδιοφυών ανθρώπων έχουν ένα είδος μαγείας, είναι σαν ο εγκέφαλός τους να λειτουργεί αποτελεσματικότερα από τον δικό μας, αλλά με έναν εντελώς διαφορετικό τρόπο. Κάθε ένα – δυο χρόνια έρχεται στο Cambridge ένας φοιτητής που μπορεί να λύσει σε λίγα λεπτά ένα πρόβλημα, το οποίο στους περισσότερους ανθρώπους – συμπεριλαμβανομένων και εκείνων που πρόκειται να τον διδάξουν, απαιτεί ώρες ή περισσότερο. Όταν συναντάς ένα τέτοιο άτομο απλά κάθεσαι πίσω και τον θαυμάζεις. Παρόλα αυτά, αυτοί οι εκπληκτικοί άνθρωποι δεν είναι πάντα οι περισσότερο επιτυχημένοι μαθηματικοί ερευνητές. Αν θέλεις να επιλύσεις ένα πρόβλημα, το οποίο απέτυχαν πριν από εσένα να λύσουν άλλοι επαγγελματίες μαθηματικοί, η ευφυΐα, όπως τη θεώρησα παραπάνω, δεν είναι ούτε αναγκαία, αλλά περισσότερο ούτε και ικανή. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο Andrew Wiles και το διάσημο τελευταίο θεώρημα του Fermat που έλυσε επιτυχώς, χωρίς να ανήκει στην κατηγορία των ιδιοφυιών, όπως την όρισα προηγουμένως.

Παρόμοιες εμπεριστατωμένες απόψεις μπορεί να αναζητήσει και να βρει κανείς και από άλλους διάσημους μαθηματικούς και ιδιαίτερα επιτυχημένους (πχ Grothendieck μετάλλιο Fields, Hardy, κ.ά.). Τελικά, όλες οι απόψεις για τους διαγωνισμούς συγκλίνουν ή αναφέρουν τη φύση των προβλημάτων που τίθενται και τον τρόπο διεξαγωγής των διαγωνισμών. Τα κλειστού τύπου προβλήματα, με δεδομένη την ύπαρξη μίας απάντησης – χωρίς τη δυνατότητα μεταβολής τους, ο περιορισμένος χρόνος και η αναγκαιότητα για την επιτυχία, όπου υπεισέρχονται στους διαγωνισμούς αποτελούν ισχυρά αντεπιχειρήματα για τη χρησιμότητά τους.

Προετοιμασία και μορφή των προβλημάτων

Εξάλλου, αν η διδασκαλία επικεντρώνεται αποκλειστικά στην εξάσκηση δεξιοτήτων και διαδικασιών, οι μαθητές δεν αναπτύσσουν υψηλής τάξης επιδεξιότητες σκέψης (H.O.T. = Higher Order Thinking), οι οποίες είναι απαραίτητες για τη βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών, παρότι τέτοιου είδους δεξιότητες μπορούν εύκολα να γίνουν κτήμα των μαθητών, οι οποίοι μπορούν να τις χρησιμοποιούν Schoenfeld(1985)[19]. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της Ελληνικής σχολικής πραγματικότητας αποτελούν οι μαθηματικές γνώσεις που αποκτούν οι μαθητές – υποψήφιοι των Πανελλαδικών εξετάσεων. Μπορούν να χρησιμοποιούν υψηλής στάθμης θεωρήματα της μαθηματικής ανάλυσης (Rolle, Fermat, Μέσης τιμής, κ.ά.) με επιδέξιους τρόπους για να αποδείξουν μία ανισότητα ή την ύπαρξη ενός αριθμού με συγκεκριμένες ιδιότητες, αλλά δύσκολα ανταποκρίνονται σε ένα πρόβλημα που απαιτεί τη χρήση της παραγώγου ως ρυθμού μεταβολής ή τη γεωμετρική ερμηνεία κάποιου από τα εν λόγω θεωρήματα.

Μεταξύ των φερόμενων ως μειονεκτημάτων των μαθηματικών διαγωνισμών είναι και ο τρόπος προσέγγισης της επίλυσής τους από αρκετούς διαγωνιζόμενους. Σύμφωνα με τον Siu (2013)[21] ακόμα και διαγωνιζόμενοι που τα καταφέρνουν καλά σε διαγωνισμούς τείνουν να αναζητούν «έξυπνες» και γρήγορες λύσεις, χωρίς όμως να αναπτύσσουν την υπομονή και το πάθος να δουλέψουν συστηματικά για την επίλυση ενός προβλήματος. Κατά συνέπεια, αναζητούν προβλήματα τα οποία θεωρούν προσιτά προς αυτούς, υπό την έννοια ότι είναι καλώς τοποθετημένα για αυτούς και αποφεύγουν να ασχοληθούν με ευρύτερες καταστάσεις που περιγράφονται σε ένα πρόβλημα ή ένα ανοικτής μορφής πρόβλημα. Η μαθηματική έρευνα από την άλλη πλευρά δεν έχει προκαθορισμένες απαντήσεις, τις οποίες ο ερευνητής γνωρίζει ότι μπορεί να βρει, απαιτεί εξερεύνηση της κατάστασης, βαθύτερη κατανόησή της και συχνά η δημιουργία μίας ερώτησης ή η αλλαγή της προβληματικής κατάστασης μπορεί να είναι χρησιμότερη από την επίλυση ενός προβλήματος μαθηματικών διαγωνισμών. Σε αυτήν την περίπτωση η δημιουργικότητα είναι που διαφοροποιεί τις καταστάσεις. Εξάλλου, οι καινοτόμες δημιουργίες, στις περισσότερες περιπτώσεις επίλυσης πραγματικών προβλημάτων εμπλέκουν τη δημιουργικότητα του ερευνητή – επαγγελματία, Davidson (2003) [5,σελ.127]. Δοθέντος ότι, σύμφωνα με πολλούς ερευνητές π.χ. Romer(1994), η μελλοντική οικονομική ανάπτυξη θα ωθηθεί από καινοτόμα προϊόντα και υπηρεσίες καθίσταται σαφές ότι η δημιουργικότητα είναι αυτή που πρέπει να αναπτύσσεται στα νεαρά άτομα μίας σύγχρονης κοινωνίας. Η ανάπτυξη της δημιουργικότητας απαιτεί ένα συνδυασμό γνωστικών και ψυχολογικών παραγόντων, των οποίων η εξέλιξη επηρεάζεται και από το περιβάλλον. Έτσι, ανάμεσα σε χαρακτηριστικά όπως κάποιες πτυχές την νοημοσύνης, γνωστικά χαρακτηριστικά, προσωπικότητα ως ολότητα και κίνητρα, τα οποία ωθούν τη δημιουργικότητα για τους μελλοντικούς επιστήμονες πρέπει να αναπτυχθεί και η κοινωνικότητά τους, καθώς επίσης και η αποδοχή κανόνων ομάδας Davidson (2003)[5].

Ένα άλλο χαρακτηριστικό μειονέκτημα που παρατηρείται συχνά σε λύσεις θεμάτων σε διαγωνισμούς είναι οι ομοιόμορφες προσεγγίσεις στην επίλυση των προβλημάτων από τα ανεξάρτητα μέλη μίας ομάδας Siu(2013)[21]. Συγκεκριμένα, έχει παρατηρηθεί ότι ομάδες με υψηλό βαθμό σε κάποιο πρόβλημα, παρουσιάζουν λύσεις των μελών τους εντελώς παρόμοιες σε σκέψη και δομή. Συνεπώς, τίθεται το ερώτημα μήπως η εντατική προπόνηση για διαγωνισμούς περιορίζει την ανεξαρτησία, τον αυθορμητισμό και τη φαντασία σε υψηλότερο βαθμό από το αναμενόμενο. Εξάλλου, αποτελεί γενικότερο προβληματισμό Davidson(2003)[5] – όχι μόνο όσον αφορά τα μαθηματικά – η αρνητική επίδραση της γνώσης – προετοιμασίας στη δημιουργική σκέψη κατά την επίλυση προβλημάτων.

Μαθηματικοί διαγωνισμοί και διασκέδαση

Στον πρόλογο των συγγραφέων στο «Η Αλίκη στη χώρα των αριθμών» αναφέρεται ότι ο επαγγελματίας μαθηματικός είναι συγγενής με την ιδέα ότι η διασκέδαση και οι σοβαρές προθέσεις δεν είναι ασύμβατες, αλλά το ζήτημα είναι για τους συγγραφείς οι αναγνώστες να διασκεδάσουν, αλλά ταυτόχρονα να μη χάσουν το μαθηματικό νόημα. Δηλαδή, τα Μαθηματικά των διαγωνισμών, ως διαφορετικής μορφής προβλήματα μπορούν να ενταχθούν με σωστή επιλογή και διαμόρφωση και στη σχολική τάξη, ώστε να κερδίσουν οι μαθητές την ευκαιρία της επίλυσης ενός προβλήματος. Δηλαδή, μπορούν να ενταχθούν στο σχολικό πρόγραμμα προβλήματα που εκτός ενός διαγωνιστικού πλαισίου μπορούν να αναδείξουν την ομορφιά των Μαθηματικών, αλλά και να προσελκύσουν τους μαθητές στους διαγωνισμούς. Εξάλλου, έχει επισημανθεί Kenderov(2006) [9] ότι αρκετοί από τους επιτυχημένους διαγωνιζόμενους σε μαθηματικούς διαγωνισμούς που δεν ακολουθούν ερευνητική πορεία στα Μαθηματικά ή έστω γενικότερα στις επιστήμες σταματούν να ασχολούνται με τα Μαθηματικά, πλήρως κορεσμένοι από τις συμμετοχές τους σε διαγωνισμούς. Ο Siu(2013)[21] αναφέρει ότι αν στο επίκεντρο ενός διαγωνισμού βρίσκεται η νίκη και μόνο, τότε καλλιεργείται προς τους μαθητές μία δυσαρέσκεια για ολόκληρη τη δραστηριότητα. Έτσι, η πίεση για υψηλό σκορ σε προβλήματα μαθηματικών ολυμπιάδων μπορεί να έχει αρνητικά αποτελέσματα. Συνεπώς, είναι αναγκαίο να τονιστεί η διασκεδαστική πλευρά των διαγωνισμών, έστω και αν απαιτούνται σε μερικές περιπτώσεις μικρές μεταβολές των κανονισμών (πχ διαθέσιμος χρόνος ή συνεργασίες διαγωνιζομένων). Ο Terence Tao[22] αναφέρει ότι τα Μαθηματικά εκτός από βαθμούς και εξετάσεις, έχουν και τη διασκεδαστική τους οπτική και τελικά προτρέπει τους μαθητές να διασκεδάσουν με τα προβλήματα των διαγωνισμών, χωρίς όμως να παραμελούν τις βαρετές – συνηθισμένες ασκήσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης. Θα μπορούσαμε να συμπληρώσουμε ότι ανάλογα και οι μαθηματικοί διαγωνισμοί δεν είναι μόνο επιτυχίες και υψηλοί βαθμοί, αλλά και επικοινωνία.

Παραδείγματα μαθηματικών διαγωνισμών

Ο **διαγωνισμός MCM** (Mathematical Contest in Modelling) αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός επιτυχημένου ομαδικού διαγωνισμού Parker(1999)[13]. Διεξάγεται από το 1985 με ομάδες τριών φοιτητών. Επικεντρώνει στις πρακτικές εφαρμογές των Μαθηματικών και ζητείται από τους φοιτητές να επιλύσουν προβλήματα του πραγματικού κόσμου. Η συμμετοχή των φοιτητών στο διαγωνισμό αναπτύσσει ομαδικό πνεύμα συνεργασίας και γεννά ενθουσιασμό στους συμμετέχοντες. Σε αυτόν μπορούν να συμμετέχουν και μαθητές λυκείων. Συνήθως δίνονται δύο προβλήματα ένα διακριτού και ένα συνεχούς τύπου και οι ομάδες έχουν 89 ώρες από την Παρασκευή έως τη Δευτέρα για να εργαστούν με τα προβλήματα. Συγκεκριμένα, οφείλουν μέσα σε αυτό το διάστημα να επιλέξουν με ποιο από τα δύο προβλήματα θα ασχοληθούν, να ερευνήσουν το πρόβλημα, να σχεδιάσουν μία λύση, να την εφαρμόσουν, να την αναλύσουν και να γράψουν μία τεχνική αναφορά στην οποία να την παρουσιάζουν. Οι συμμετέχοντες μπορούν να χρησιμοποιούν πηγές βιβλιοθήκης ή διαδικτύου, αλλά όχι συμβουλές από ειδικούς. Σε τέτοιου είδους διαγωνισμούς διακρίνονται χαρακτηριστικά που άρουν πιθανές αρνητικές προεκτάσεις των διαγωνισμών Davidson(2003)[5], Lam(2012), όπως η πίεση λόγω χρόνου, το αίσθημα αποτυχίας λόγω υπερβολικού ανταγωνισμού, ενώ ταυτόχρονα υποστηρίζεται η συνεργατική μορφή τους.

Ο διαγωνισμός **W.M.T.C.** (World Mathematics Team Championship [28]) δημιουργήθηκε από τους καθηγητές Zhou Guozhen (Κίνα) και Quan K. Lam από το πανεπιστήμιο της California (USA) το 2010. Στην πρώτη του διεξαγωγή συμμετείχαν 73 ομάδες από 11 χώρες σε τρία επίπεδα: Junior, Intermediate και Advanced. Και οι δύο καθηγητές πιστεύουν ότι η ομαδική έρευνα και η επικοινωνία είναι ουσιαστικές δεξιότητες που πρέπει να αναπτυχθούν και ο διαγωνισμός αυτός είναι ένα μέσο. Οι βασικές διαφοροποιήσεις αυτού του διαγωνισμού εστιάζονται στα εξής χαρακτηριστικά:

α) Δίνει μεγαλύτερη σημασία στις ομάδες σε σχέση με τα άτομα. Οι μαθηματικοί διαγωνισμοί θα έπρεπε να είναι κάτι περισσότερο από τον απλό προσδιορισμό των νικητών ή της εύρεσης των ατόμων με το μεγαλύτερο Βαθμό. Αυτός ο διαγωνισμός προάγει το πνεύμα της συνεργασίας και της οργάνωσης των δεξιοτήτων των μαθητών. Οι μαθητές πρέπει να μάθουν πώς να μοιράζονται μεταξύ τους καθήκοντα αποτελεσματικά και πώς μπορούν να δράσουν με τις ιδιαιτερότητές τους (πλεονεκτήματα και αδυναμίες τους) στο πλαίσιο μίας ομάδας με συγκεκριμένους στόχους. Πρέπει να διαχειριστούν το χρόνο τους ως ομάδα, να ελέγχουν ο ένας τις απαντήσεις του άλλου στην περίπτωση εύρεσης διαφορετικών λύσεων και να συντάσσουν την καλύτερη απάντηση. Ο WTCM βραβεύει τόσο ομάδες, όσο και άτομα.

β) Οι διαγωνιζόμενοι ζουν μαζί και συμμετέχουν σε δραστηριότητες αναψυχής και πολιτισμού όλοι μαζί. Οι μαθητές περνούν τέσσερις ημέρες στο Πεκίνο διαγωνιζόμενοι, συμμετέχοντας σε δραστηριότητες και βλέποντας τα αξιοθέατα της πόλης. Γνωρίζονται μεταξύ τους και αλληλεπιδρούν με τα μέλη όχι μόνο της ομάδας τους, αλλά και των υπολοίπων ομάδων.

γ) Αυτός ο διαγωνισμός καλλιεργεί το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά, όταν βρίσκονται στο επίπεδο των Junior, που είναι πιο δεκτικοί στη μάθηση των μαθηματικών. Κάθε ομάδα αποτελείται από έξι μαθητές με ένα ή δύο αναπληρωματικά μέλη. Υπάρχουν τρεις γύροι στο διαγωνισμό: ο ομαδικός, η σκυταλοδρομία και ο ατομικός.

Ένας επίσης διαγωνισμός ομάδων είναι και ο **Purple Comet/Math Meet** [15]. Έχει διαφορετικά χαρακτηριστικά από τους προηγούμενους ως προς δύο κυρίως σημεία: είναι διαδικτυακός και δεν είναι απαραίτητα συνεργατικός, λόγω της φύσης και του πλήθους των προβλημάτων. Συγκεκριμένα, ομάδες μαθητών, με έναν επιβλέποντα, αποτελούμενες από έναν μέχρι και έξι μαθητές καλούνται να δώσουν λύσεις σε 20 προβλήματα μέσα σε μία(οι μικροί) ή μιάμιση ώρα (οι μεγάλοι). Συνεπώς, οι μαθητές συνεργάζονται μόνο στο ως προς το πώς θα κατανείμουν τα θέματα, ώστε να προλάβουν να τα λύσουν όλα εντός του προβλεπόμενου χρόνου. Στον ίδιο χρόνο θα πρέπει να δακτυλογραφήσουν και να ανεβάσουν τις απαντήσεις τους στην ιστοσελίδα του διαγωνισμού. Κατά τα λοιπά ο διαγωνισμός είναι ετήσιος, διεθνής και ξεκίνησε το 2003. Οι ομάδες μαζί με τον επιβλέποντα μπορούν να διαγωνιστούν σε διάστημα 10 ημερών, στο οποίο ο επιβλέπων συνδέεται στη σελίδα και κατεβάζει τα προβλήματα, τα οποία μοιράζει στους μαθητές της ομάδας, που πρέπει να τα λύσουν στον προκαθορισμένο για αυτούς χρόνο. Το 2012 συμμετείχαν 10,000 μαθητές με 2700 ομάδες από 43 χώρες. Αυτό ακριβώς είναι και το πλεονέκτημα του συγκεκριμένου διαγωνισμού ότι δίνει τη δυνατότητα συμμετοχής πολλών διαφορετικών μαθητών στο χρόνο που μπορούν. Οι ομάδες που μπορούν να συμμετέχουν είναι ομάδες με μέλη από το ίδιο σχολείο με επιβλέπων κάποιον καθηγητή τους, ομάδες με μέλη από περισσότερα του ενός σχολεία ή ακόμα και ομάδες χωρίς περιορισμούς οι οποίες όμως δε συμμετέχουν για τα βραβεία.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει και ο **Mandelbrot Team Play** [32], ο οποίος είναι σχεδιασμένος για μαθητές που αρέσκονται να δουλεύουν κυρίως σε ανοικτού αποτελέσματος προβλήματα (open ended problems) και συνήθως μπορεί να αποτελεί και προετοιμασία για πιο απαιτητικούς διαγωνισμούς όπως ο A.R.M.L. ή ο U.S.A.M.O. Σε αυτόν το διαγωνισμό ομάδες τεσσάρων μαθητών εργάζονται μαζί σε μία σειρά προβλημάτων απόδειξης. Οι μαθητές γράφουν τις αιτιολογήσεις τους σε διαδοχικά μέρη, τα οποία συνενώνουν για να προκύψει μία πλήρης απόδειξη. Η ομαδική δοκιμασία διαρκεί μία ώρα και οι απαντήσεις ταχυδρομούνται ηλεκτρονικά σε κριτές. Ακριβείς και αναλυτικές λύσεις δίνονται σε όλα τα προβλήματα από τους διοργανωτές, ώστε να χρησιμοποιηθούν ως παραδείγματα.

Άλλοι μαθηματικοί διαγωνισμοί που λειτουργούν και με ομάδες μαθητών και μπορούν να αναζητηθούν και στο διαδίκτυο είναι: Suffolk Maths Team Challenge, Pummill Math Relays, UKMT Team Challenge, Stanford Math Tournament, Canadian Team Mathematics Contest, American Regions Mathematics League (ARML) και άλλοι.

Μία πρόταση για έναν ομαδικό διαγωνισμό μαθηματικών

Ένας διαγωνισμός με ομάδες συνεργασίας

Ομαδικοί διαγωνισμοί Μαθηματικών, όπως περιγράφηκε προηγουμένως, υπάρχουν και λειτουργούν καλά παγκοσμίως. Τόσο στη σύγχρονη μαθηματική έρευνα, όσο και στη Διδακτική των Μαθηματικών οι συνεργασίες θεωρούνται απαραίτητες. Η εξειδίκευση στα διάφορα πεδία

Ομαδικοί Μαθηματικοί Διαγωνισμοί
των Μαθηματικών απαιτεί συχνά συνεργασίες πολλών μαθηματικών για την επίτευξη ενός σημαντικού αποτελέσματος. Σύμφωνα με τον Ziegler στο Schleicher(2011)[18] οι «ερευνητικοί διαγωνισμοί[1]» είναι περισσότερο συνεργατικοί από ποτέ. Ενώ και ο Kenderov(2006)[9] – γνώστης των μαθηματικών διαγωνισμών παγκοσμίως - αναφέρει ως ένα από τα επόμενα βήματα που πρέπει να γίνουν στους μαθηματικούς διαγωνισμούς την ομαδική εργασία. Συγκεκριμένα, γράφει:

Η εργασία σε ομάδες είναι μία καλά εφαρμοσμένη τακτική στη σύγχρονη επιστήμη. Αιώνες τώρα, η έρευνα στα μαθηματικά ήταν μία ατομική διαδικασία. Σήμερα, βλέπουμε όλο και περισσότερες ομαδικές εργασίες στα Μαθηματικά και ειδικά στις εφαρμογές τους. Αποκαλύπτεται λοιπόν μία ακόμα ομοιότητα των σύγχρονων Μαθηματικών και των άλλων επιστημών, όπου η ομαδική εργασία έχει παραδοσιακά βαθύτερες ρίζες. **Η ικανότητα να εργάζεται κανείς ως μέλος μίας ομάδας αποτελεί πολύτιμη δεξιότητα, η οποία θα μπορούσε και θα έπρεπε να καλλιεργείται από μικρή ηλικία.**

Από την άλλη πλευρά και οι ομάδες μπορούν να ωφεληθούν από ένα διαγωνιστικό περιβάλλον. Σύμφωνα με το Mulvey(2010)[11] η τοποθέτηση σαφών στόχων και ο συναγωνισμός αποτελούν δύο τεχνικές κινητοποίησης που φαίνεται να έχουν παρόμοιες επιδράσεις στην απόδοση της ομάδας ως προς την επίτευξη των στόχων. Ειδικότερα, οι επιδράσεις του συναγωνισμού μεταξύ ομάδων στην αποτελεσματικότητα μίας ομάδας ως προς την επίτευξη των στόχων της είναι ιδιαιτέρως θετικές. Δηλαδή, η συνεργατική μάθηση μπορεί να ενισχύεται, μέσα από ένα πλέγμα σαφών στόχων, με τον υγιή συναγωνισμό μεταξύ των ομάδων. Επίσης, οι συνεργατικές δραστηριότητες εμπλέκουν την κατασκευή νέων ιδεών και δημιουργία προβλημάτων, βασισμένων στην προσωπική, αλλά και την κοινή γνώση και εμπειρία των μελών της ομάδας. Έτσι, εφαρμόζονται μερικές από τις βασικές αρχές του εποικοδομισμού. Οι μαθητές ερευνούν σημαντικά, πραγματικά (real world) προβλήματα μέσω εξερευνητικών ερωτημάτων Thirteen [23]. Οι συνεργατικές δραστηριότητες μπορούν να έχουν διαφορετικούς στόχους από βασικές δεξιότητες, έως και υψηλής στάθμης επιδεξιότητες (H.O.T. = Higher Order Thinking), οπότε μπορούν να ενταχθούν στους μαθηματικούς διαγωνισμούς. Εξάλλου, η μάθηση των Μαθηματικών δεν αντιμετωπίζεται πλέον αποκλειστικά ως απόκτηση της μαθηματικής γνώσης, αλλά επίσης και μέσω της συμμετοχής σε συζητήσεις της μαθηματικής κοινότητας Sfard(2000)[20]. Με την ενεργή τους συμμετοχή σε κοινωνικές δραστηριότητες οι μαθητές έχουν την ευκαιρία όχι μόνο να αναπτύξουν μαθηματικές δεξιότητες και γνώσεις, αλλά να εξηγήσουν επίσης τις σκέψεις τους, να τις επιβεβαιώσουν, να συζητήσουν τις παρατηρήσεις τους και να μάθουν να χρησιμοποιούν αποτελεσματικές μαθηματικές μεθόδους για την επίλυση διαφορετικών προβλημάτων, μέσα και από την παρατήρηση των συμμαθητών τους. Έτσι, στο πρόγραμμα των περισσότερων μαθηματικών διαγωνισμών παγκοσμίως εντάσσονται δραστηριότητες μετά τον διαγωνισμό, στις οποίες οι συναγωνιζόμενοι έχουν την ευκαιρία να γνωριστούν και να μιλήσουν για το κοινό τους ενδιαφέρον που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι τα όμορφα προβλήματα των μαθηματικών διαγωνισμών.

---

[1] Ο Ziegler αναφέρει δύο ερευνητικά προβλήματα μαθηματικών στο συγκεκριμένο έργο: τον υπολογισμό του π με ακρίβεια και την βέλτιστη τοποθέτηση τετραέδρων στο χώρο (tetrahedra packing problem), στα οποία ο συναγωνισμός μεταξύ ερευνητικών ομάδων μαθηματικών για την εύρεση καλύτερης λύσης κάθε φορά είναι παροιμιώδης. Σε αυτό το πλαίσιο εισάγει και την έννοια *ερευνητικοί διαγωνισμοί.*

Δημιουργία προβλημάτων από τους διαγωνιζόμενους

Σύμφωνα με πολλούς ερευνητές μαθηματικών, όπως για παράδειγμα οι T.Gowers και S.Smirnov στο Schleicher(2011)[18], η δημιουργία ενός προβλήματος μπορεί να είναι σημαντικότερη από την επίλυση ενός άλλου προβλήματος. Εξάλλου, οι Lubart και Mouchiroud στο Davidson(2003)[5] αναφέρουν ότι άτομα που μπορούν να μεταβάλλουν μία αναπαράσταση και να περάσουν σε μία άλλη, χωρίς να έχουν ιδιαίτερες προτιμήσεις σε κάποιες συγκεκριμένες μορφές είναι συνήθως περισσότερο δημιουργικά από άλλους. Ακόμα στις βασικές αρχές (standards) για τη διδασκαλία των μαθηματικών του National Council of Teachers of Mathematics (N.C.T.M. 2012)[12] αναφέρεται ότι οι μαθητές λυκείου πρέπει να έχουν μία εμπειρία στην αναγνώριση και επίλυση δικών τους μαθηματικών προβλημάτων. Συνεπώς, προκύπτει εύλογα το ερώτημα, αν κάποια προβλήματα τόσο εντός σχολικού προγράμματος, αλλά και σε έναν διαγωνισμό θα μπορούσαν να διατυπώνονται από τους μαθητές. Αν και αυτό φαίνεται δύσκολο να γίνει σε πλήρη ανάπτυξη και χωρίς προηγούμενη εξάσκηση από τους μαθητές, οι Brown και Walter, στο Brown(2005)[4], θεμελιώνουν ότι οι μαθητές μπορούν να δουν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα με οξύτερη ματιά, να ενθαρρυνθούν να δημιουργήσουν νέες ιδέες, να πετύχουν βαθύτερη κατανόηση του αρχικού προβλήματος και τελικά να θέσουν ένα νέο πρόβλημα, είτε εντός, είτε εκτός σχολικού προγράμματος. Η διαδικασία και οι δραστηριότητες που περιγράφουν ξεκινούν από την επίλυση ή απόδειξη ενός απλού θεωρήματος ή προβλήματος, όπως το Πυθαγόρειο θεώρημα για παράδειγμα. Το πρώτο βήμα της διαδικασίας είναι η πλήρης αναγνώριση των δεδομένων και των ζητούμενων του προβλήματος. Στη συνέχεια οι μαθητές εξασκούνται στο να βρίσκουν εφαρμογές του, ώστε να έχουν μία πρώτη πηγή δημιουργίας νέων προβλημάτων, μέσω εφαρμογών ήδη γνωστών μαθηματικών προτάσεων σε πραγματικές καταστάσεις. Η δεύτερη φάση περιλαμβάνει την κατάσταση διερεύνησης άρνησης μίας δεδομένης ιδιότητας (**what if not** phase), κατά την οποία οι μαθητές εξασκούνται στη διερεύνηση ενός αλλαγμένου προβλήματος όπου έχει αρθεί ή μεταβληθεί μία δεδομένη ιδιότητα. Στο παράδειγμα του Πυθαγορείου θεωρήματος θα μπορούσαν να διερωτηθούν τι θα συνέβαινε αν η αλγεβρική σχέση που το περιγράφει δεν είχε ισότητα, αλλά ανισότητα. Ή ακόμα, αν στη γεωμετρική του θεώρηση τα τετράγωνα των πλευρών δεν ήταν τετράγωνα, αλλά ισόπλευρα τρίγωνα ή γενικότερα όμοια σχήματα; Δηλαδή, αυτή η διαδικασία μπορεί να δώσει πολλά διαφορετικά ερωτήματα και όσα από αυτά οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν τελικά, θα μπορούσαν να αποτελούν νέα ερωτήματα – προβλήματα. Επίσης, η δημιουργία προβλημάτων βοηθά και στην ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων. Γιατί είναι αναμενόμενο ένα αποτέλεσμα; Συνήθως αναζητείται μία απάντηση, η οποία όχι μόνο καθιστά κατανοητή τη λύση, αλλά ταυτόχρονα τη διαφωτίζει. Δηλαδή, εξηγεί γιατί συμβαίνει, παρουσιάζει τις βαθύτερες αιτίες και συνδέσεις του αρχικού προβλήματος και της λύσης. Σε αυτό το γιατί αναζητείται ουσιαστικά το γιατί και πώς προήλθε το συγκεκριμένο αποτέλεσμα και αν επιπλέον επιδέχεται γενίκευση. Εξάλλου, στην ιστορία της μαθηματικής έρευνας δεν είναι λίγες οι φορές που νέες θεωρίες έχουν προκύψει από την άρνηση δεδομένων ιδιοτήτων με χαρακτηριστικό παράδειγμα την ανάπτυξη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών κατά τον 19ο αιώνα Bonola(1955)[3]. Η συσχέτιση μεταξύ της ανάπτυξης ικανοτήτων επίλυσης και δημιουργίας προβλημάτων εμφανίζεται ισχυρή Brown(2003)[4], ενώ η δημιουργία προβλημάτων ως δραστηριότητα μπορεί να είναι αυτόνομη, αλλά ταυτόχρονα βοηθά τόσο στην ανάπτυξη ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων, όσο και στη βαθύτερη προσωπική τους κατανόηση. Επίσης, εφόσον η δημιουργία προβλημάτων και ερωτήσεων σε σημαντικό βαθμό μπορεί να είναι ευκολότερη από την επίλυση μπορεί να αποτελεί και ένα συστατικό αντιμετώπισης της μαθηματικοφοβίας.

Ακόμα λοιπόν και αν δεν προβλέπεται γενικά στους μαθηματικούς διαγωνισμούς, αλλά ούτε είναι σαφές στα Αναλυτικά προγράμματα Μαθηματικών στην Ελληνική εκπαίδευση, ένας μαθηματικός διαγωνισμός θα μπορούσε να υποστηρίξει μία από τις δοκιμασίες του διαγωνισμού μεταξύ των ομάδων να είναι και η δημιουργία προβλήματος προς επίλυση από τις υπόλοιπες ομάδες. Ένα τέτοιο πρόβλημα θα μπορεί να είναι μέσα στην ύλη των μαθηματικών της τάξης που διαγωνίζονται οι μαθητές. Ενδεικτικά, ως αφόρμηση να δίνεται ένα συγκεκριμένο πρόβλημα ή θεώρημα και να ζητείται από την ομάδα των μαθητών να το τροποποιήσει κατάλληλα, ώστε να δημιουργήσει ένα νέο πρόβλημα, το οποίο θα τεθεί με τη σειρά του προς επίλυση από τις υπόλοιπες ομάδες. Μία διαδικασία που μπορεί να χρησιμοποιηθεί εσωτερικά σε μία ομάδα είναι ένας καταιγισμός ιδεών για την άρνηση κάποιας δοσμένης ιδιότητας ενός συγκεκριμένου προβλήματος αφόρμησης. Σε αυτό το σημείο εμπλέκεται ουσιαστικά η λειτουργία και συνεργασία της ομάδας, αφού συχνά τα άλλα μέλη μίας ομάδας μπορούν να δουν αυτό που ένα άτομο «αρνείται» να αναγνωρίσει.

Εργαλείο θα μπορούσε να είναι και ο Η/Υ. Οι μαθητές – διαγωνιζόμενοι μπορούν, για παράδειγμα με τη βοήθεια λογισμικού δυναμικής Γεωμετρίας να αναζητήσουν μεταβολές σε ένα πρόβλημα Γεωμετρίας και να οδηγηθούν στη δημιουργία ενός νέου προβλήματος. Ενώ κάποιος επόπτης – υπεύθυνος καθηγητής άλλης ομάδας – θα μπορούσε να εκφέρει άποψη για την ορθότητα του προβλήματος και την επιλυσιμότητά του, αν και το σωστά διατυπωμένο πρόβλημα θα δίνεται μαζί με τη λύση του στον επόπτη και θα βαθμολογείται τόσο η δημιουργία σωστού προβλήματος όσο και η ορθή λύση του.

Επίσης, θα μπορούσε να ζητείται και η δημιουργία προβλήματος με συγκεκριμένα δεδομένα και κοστολόγηση των λύσεων απαντήσεων με τη χρήση όσο το δυνατόν λιγότερων από αυτά. Παραδείγματα δραστηριοτήτων παρουσιάζονται στα επόμενα.

Προτεινόμενη δομή και λειτουργία ενός ομαδικού μαθηματικού διαγωνισμού

Οι δραστηριότητες που μπορούν να επιλεχθούν για έναν τέτοιο διαγωνισμό μπορούν να είναι πολλαπλές. Από την ανάλυση που προηγήθηκε είναι εμφανές ότι στα χαρακτηριστικά ενός σύγχρονου διαγωνισμού είναι αναγκαίο να συμπεριλαμβάνονται: α)ομαδικές δραστηριότητες, β) δραστηριότητες δημιουργίας προβλημάτων, γ) δραστηριότητες συζήτησης μετά το διαγωνισμό μεταξύ των διαγωνισθέντων, δ) δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων ατομικά. Ενισχυτικά, θα μπορούσαν να υπάρχουν και δραστηριότητες επίλυσης ανοικτών δεδομένων και ζητούμενων προβλημάτων ή ακόμα και πραγματικών προβλημάτων με ελεύθερη πρόσβαση σε βιβλιογραφία. Σε κάποιες περιπτώσεις αναφέρεται Kenderov(2006)[9] ότι είναι αναγκαίο να ενταχθούν στους μαθηματικούς διαγωνισμούς και προβλήματα προγραμματισμού ή αλγοριθμικής επίλυσης, ώστε να αποφευχθεί η διαρροή ικανών στα μαθηματικά ατόμων που αρέσκονται και στον προγραμματισμό. Επίσης, ο περιορισμός του χρόνου δεν μπορεί να είναι πάντα καθοριστικός. Δηλαδή, πρέπει να υπάρχει η δυνατότητα ανάδειξης και ατόμων που δρουν πιο αργά ατομικά στην επίλυση ενός προβλήματος, αλλά μπορεί ενδεχομένως να κάνουν βαθιές σκέψεις και να δίνουν εξαιρετικές λύσεις. Στη συνέχεια εστιάζουμε σε δραστηριότητες που δεν συναντώνται σε όλους τους μαθηματικούς διαγωνισμούς.

Παραδείγματα δραστηριοτήτων

Μαθηματική Σκυτάλη: Ερωτήσεις και μικροπροβλήματα κατανέμονται ανά βαθμό δυσκολίας σε διαφορετικά δοχεία με βαθμολογία ανάλογη με το βαθμό δυσκολίας. Κάθε άτομο από μία ομάδα επιλέγει ένα πρόβλημα με το βαθμό δυσκολίας που επιθυμεί και το επιλύει. Παραδίδει τη λύση γραμμένη στον επόμενο συμπαίκτη του, ο οποίος την τοποθετεί στο κουτί απαντήσεων, επιλέγει ένα νέο πρόβλημα με τη δυσκολία που επιθυμεί και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι τη λήξη του χρόνου. Σε αυτήν τη δραστηριότητα όλοι οι μαθητές έχουν λόγο και συμμετοχή, αφού μπορούν να βρουν προβλήματα ανάλογα των δυνατοτήτων τους.

Σε μία παραλλαγή της μαθηματικής σκυτάλης θα μπορούσε κάθε μέλος να επιλύει ένα πρόβλημα, την απάντηση του οποίου δίνει στο επόμενο μέλος της ομάδας που του είναι απαραίτητη για να επιλύσει με τη σειρά του ένα νέο πρόβλημα και ομοίως μέχρι το τελευταίο μέλος να απαντήσει.

Δημιουργία προβλήματος: Στόχος είναι κάθε μία από τις ομάδες να δημιουργήσει μέσα στον προκαθορισμένο χρόνο ένα πρόβλημα μαζί με τη λύση του. Στη συνέχεια και πάλι σε προκαθορισμένο χρόνο τα προβλήματα κληρώνονται μεταξύ των ομάδων που συμμετέχουν και επιλύονται από τις άλλες ομάδες. Αυτή η δραστηριότητα μπορεί να έχει πολλές διαφορετικές μορφές. Για παράδειγμα μπορεί να υπάρχει μία δεξαμενή φύλλων δεδομένων, από την οποία κάθε ομάδα μπορεί να επιλέγει ένα φύλλο. Σε καθένα από αυτά τα φύλλα θα υπάρχουν κάποια δεδομένα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη δημιουργία ενός προβλήματος. Καθένα από τα δεδομένα θα έχει κάποιο «κόστος χρήσης», δηλαδή η ομάδα θα χρεώνεται περισσότερες μονάδες ανάλογα με τα δεδομένα που χρησιμοποιεί. Πιο συγκεκριμένα ένα φύλλο θα μπορούσε να διαθέτει: ένα τρίγωνο, ίσες πλευρές, μία διάμεσο, έναν κύκλο, ένα ύψος, μία προέκταση ενός ευθυγράμμου τμήματος κατά ίσο μήκος με το αρχικό. Όλα αυτά «κοστολογημένα» θα μπορούσαν οι διαγωνιζόμενοι μίας ομάδας να χρησιμοποιήσουν κάποια από αυτά και να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα προς επίλυση από τις υπόλοιπες ομάδες.

Σε μία άλλη μορφή της ίδιας δραστηριότητας θα μπορούσε να δίνεται ένα πρόβλημα και να ζητείται από τους μαθητές να αλλάξουν ένα από τα δεδομένα του, ώστε να δημιουργηθεί ένα νέο πρόβλημα.

Κλασικό: Σε κάθε ομάδα διαγωνιζομένων δίνεται μία σειρά προβλημάτων που καλούνται να επιλύσουν σε ένα ορισμένο χρονικό διάστημα. Σε αυτήν την περίπτωση μπορεί να δράσει ο καθένας ατομικά και να λύσει κάποια από τα προβλήματα, πάντα όμως υπάρχει το ζήτημα του συντονισμού και της επιλογής του προβλήματος που θα λύσει ο καθένας. Παρακάτω παρατίθεται μία τέτοια σειρά προβλημάτων από τον Pummill Math Relays στο σκέλος MathMania 2011:

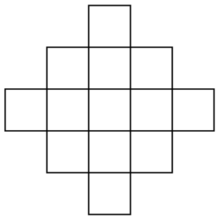
1. Αν διαθέτεις 46 τέταρτα και δεκάρες του δολλαρίου συνολικής αξίας 7 δολλαρίων, να βρεθεί πόσα νομίσματα κάθε τύπου διαθέτεις.

2. Από ένα σύνολο 6 γυναικών και 4 ανδρών επιλέγεται μία επιτροπή αποτελούμενη από 3 γυναίκες και 2 άνδρες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

3. Να βρεθεί ο επόμενος όρος της ακολουθίας: 1,1,1,4,10,25,64,163,...

4. Σε έναν αγώνα 100 μέτρων η Αλίκη κερδίζει τον Βασίλη κατά 10 μέτρα, ενώ ο Βασίλης τον Γιάννη κατά 20 μέτρα. Πόσο κερδίζει η Αλίκη τον Γιάννη;

5. Να βρεθεί ο συνολικός αριθμών ορθογωνίων που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



Σκυταλοδρομία σε ζεύγη: Ο σκοπός είναι να διεξαχθεί ένας διαγωνισμός ταχύτητας όπου οι ομάδες διαγωνίζονται σε ζευγάρια και απαντούν εναλλάξ ερωτήσεις. Κάθε ομάδα χωρίζεται σε δύο ζευγάρια που κάθονται σε δύο θρανία, κοιτώντας όλοι προς την ίδια κατεύθυνση. Ένα μέλος του ζεύγους Α για κάθε ομάδα επιλέγει την ερώτηση Α1 και την δίνει στο άλλο μέλος του ζεύγους Α για να την απαντήσουν. Μόλις είναι σίγουροι για την απάντηση την παραδίνουν. Αν είναι σωστή αυτή τότε παραλαμβάνουν την ερώτηση Β1, την οποία δίνουν στο ζεύγος Β της ομάδας τους, ενώ αν η απάντηση στην Α1 ήταν λανθασμένη έχουν άλλη μία προσπάθεια απάντησης. Ομοίως συνεχίζει το ζεύγος Β, μέχρι να εξαντληθεί ο χρόνος ή οι ερωτήσεις.

Αριθμόλεξο: Κάθε ομάδα χωρίζεται σε δύο ζεύγη καθένα από τα οποία αναλαμβάνει να συμπληρώσει τους αριθμούς με βάση τις οριζόντιες ή τις κάθετες ερωτήσεις. Δείτε ένα παράδειγμα από τον UKMT Team Challenge εδώ:

http://www.suffolkmaths.co.uk/pages/Maths%20Comps/Regional%20Final/Cross%20Number%20Regional%20Final%202006.doc

Πραγματικό πρόβλημα: Ζητείται από κάθε ομάδα να επιλύσει ένα πραγματικό πρόβλημα. Σε αυτήν τη δραστηριότητα οι μαθητές μπορούν να επιλέξουν πόσο ειδικές παραδοχές θα κάνουν και άρα πόσο η μοντελοποίησή τους ταιριάζει καλύτερα στο πραγματικό πρόβλημα. Οι κριτές βαθμολογούν την όσο το δυνατόν πληρέστερη μοντελοποίηση και λύση.

Διερευνητικό πρόβλημα(open ended): Δίνεται σε κάθε ομάδα ένα πρόβλημα χωρίς καθόλου ζητούμενα και τους ζητείται να δώσουν όσες περισσότερες εκδοχές απαντήσεων μπορούν σε ένα επαρκές χρονικό διάστημα. Αποτελεί άλλη μία δραστηριότητα, στην οποία προωθείται η αυτενέργεια των μαθητών και εξωθείται η φαντασία τους Becker(1997). Επίσης, αποτελεί μία δραστηριότητα στην οποία δεν υπάρχουν μαθητές, οι οποίοι να μην μπορούν να δώσουν κάποιες απαντήσεις. Παράδειγμα δραστηριότητας: Δίνεται ένα φύλλο χαρτί Α4 και το διπλώνετε ξανά και ξανά και ξανά και... Καταγράψτε τα συμπεράσματά σας.

Πολλές από τις προηγούμενες δραστηριότητες μπορούν να ενταχθούν στο πλαίσιο οποιουδήποτε ομίλου Μαθηματικών ή ακόμα και εντός του σχολικού προγράμματος κατάλληλα προσαρμοσμένες. Έτσι, οι μαθητές θα μπορούν να εξασκούνται σε αυτές όλη τη χρονιά και να τις εντάσσουν ως μέρος επίτευξης ενός υψηλού στόχου που μπορεί να είναι και η επιτυχία σε έναν τέτοιου είδους διαγωνισμό.

Συμπεράσματα – Προεκτάσεις

Η δομή και λειτουργία των Π.Π.Σ., όπως αυτή διαμορφώθηκε μέσω του νόμου 3966/2011, ενσωματώνει δραστηριότητες και ανθρώπους (μαθητές και εκπαιδευτικούς) με κύριο στόχο τη συγκρότηση άριστων προσωπικοτήτων, εφήβων, οι οποίοι ως ενήλικες θα αποτελέσουν τον πυρήνα μίας σύγχρονης, λειτουργικής και ραγδαία αναπτυσσόμενης Ελληνικής κοινωνίας. Ένα περιβάλλον ευγενούς άμιλλας, όπως αυτό διαμορφώνεται σήμερα στα Π.Π.Σ., αποτελεί σημαντικό προωθητικό παράγοντα για την επίτευξη τόσο υψηλών στόχων. Πέρα από τις πολλαπλές διαστάσεις των δυνατοτήτων ενός εφήβου που πρέπει να αναπτυχθούν, ο πυρήνας μίας επιτυχημένης κοινωνίας βρίσκεται στη συνεργασία. Ο συνδυασμός ενός διαγωνισμού Μαθηματικών, μέσω συνεργασιών των μαθητών και δραστηριοτήτων που προάγουν την αγάπη για την επιστήμη και την έρευνα μπορούν να ανοίξουν τους ορίζοντές τους και να τους καταστήσουν τους μελλοντικούς καινοτόμους δημιουργούς. Μία συνεργασία των εκπαιδευτικών των Π.Π.Σ., καταρχήν των Μαθηματικών, μπορεί να δημιουργήσει μία τέτοια ομάδα δραστηριοτήτων, η οποία φυσικά στο μέλλον μπορεί να εξελιχθεί και να εντάξει τόσο τις Φυσικές επιστήμες, όσο και την Πληροφορική. Το μόνο που υπολείπεται είναι να κάνουμε την αρχή.

Βιβλιογραφία

[1] Bicknell, B., *Gifted students and the role of mathematics competitions.* Australian Primary Mathematics Classroom, 13(4), 16 – 20, 2008.

[2] Becker, J. & Shimada, L., *The open-ended approach.* Reston (VA): N.C.T.M., 1997.

[3] Bonola R., *Non – Euclidean Geometry,* Dover, 1955.

[4] Brown S.I., Walter M.I., *The Art of Problem Posing,* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, London, 2005.

[5] Davidson J., Sternberg R., *The psychology of problem solving,* Cambridge, 2003.

[6] Hurme, T., & Jarvela, S., *Students' Activity in Com-puter-Supported Collaborative Problem Solving in Mathematics,* International Journal of Computers for Math-ematical Learning, 10(1), 49-73 2005.

[7] Gowers T., *Mathematics: a very short introduction,* Oxford University press, 2002.

[8] Kalman, R., *Challenging gifted students: The math Olympiads.* Understanding Our Gifted, 14(4), 13 – 14, 2002.

[9] Kenderov Petar S., *Competitions and mathematics education*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain, European Mathematical Society, 2006.

[10] Lesswrong.com, http://lesswrong.com/lw/2v1/great_mathematicians_on_math_competitions_and/

[11] Mulvey P. and Ribbens B., *The Effects of Intergroup Competition and Assigned Group Goals on Group Efficacy and Group Effectiveness*, ACAD MANAGE J October 1, 2010 vol. 53 no. 5 943-969.

[12] *NCTM NCATE Standards in secondary education,* National Council of Teachers of Mathematics, 2012.

[13] Parker M., Zullo H., Preyer N., *The mathematical contest in modeling (M.C.M): success at a small regional university*, primus: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 9:4, 289-300, 1999.

[14] Polya, G. (1945; 2nd edition, 1957). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

[15] *Purple Comet! Math Meet!,* http://purplecomet.org

[16] Selden, J., & Selden, A., *Unpacking the logic of mathematical statements.* Educational Studies in Mathematics, 29(2), 123-151.(1995)

[17]Schaaf W., Recreational Mathematics. A guide to the literature, NCTM, 1963.
[18]Schleicher D., Lackmann M. (editors), An Invitation to Mathematics From Competitions to Research, Springer, 2011.
[19]Schoenfeld A., *Mathematical Problem Solving,* Academic Press Inc., 1985.
[20]Sfard, A. (2000). *On reform movement and the limits of mathematical discourse.* Mathematical Thinking and Learning 2(3), 157–189.
[21]Siu Man Keung, The good, the bad and the pleasure (not pressure!) of mathematics competitions, Mathematics Competitions, 2013 Vol 26 No 1.
[22]Tao Terence, http://terrytao.wordpress.com/career-advice/advice-on-mathematics-competitions/
[23]Thirteen.org, *Workshop on cooperative and collaborative learning*, http://www.thirteen.org/edonline/concept2class/ coopcollab/ index_sub5.html .
[24]Thrasher T.N., *The Benefits of Mathematics Competitions*, Alabama Journal of Mathematics, Spring 2008.
[25]Thurston W., *Mathematical Education,* Notices of the AMS 37, 1990.
[26]Toh Tin Lam, *The roles of mathematics competition in singapore mathematics education,* International Congress on Mathematical Education Seoul, Korea, 2012.
[27]Tripathi P.N., *Problem solving in mathematics and cognitive development*, State University of New York, 2014.
[28]wmtc-math.net, *World Mathematics Teams Championship,* http://www.wmtc-math.net/en/whatwmtc.html
[29]World Federation of National Mathematics Competitions, http://www.amt.edu.au/wfnmc/
[30]Zawaira A. and Hitchcock G., *A Primer for Mathematics Competitions*, Oxford Mathematic, 2009.
[31]Θωμαΐδης Ι., Πούλος Α., Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, Ζήτη, 2000.
[32]*Mandelbrot Team Play,* www.mandelbrot.org/resources/ forms/admin_mtp.pdf