ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Α. Οι ασκήσεις που πρέπει να ξέρω

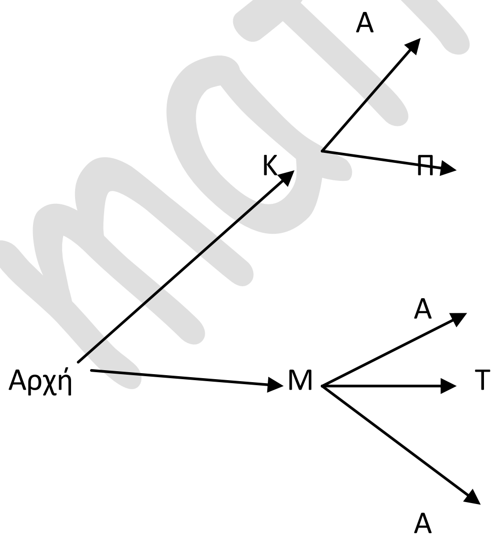
'Ασκηση 1

Μια οικογένεια από την Αθήνα αποφασίζει να κάνει τις επόμενες διακοπές της στην Κύπρο (Κ) ή στη Μακεδονία (Μ). Στην Κύπρο μπορεί να πάει με αεροπλάνο (Α) ή με πλοίο (Π). Στη Μακεδονία μπορεί να πάει με το αυτοκίνητό της (Αυ), με τρένο (Τ) ή με αεροπλάνο (Α). Αν ως αποτέλεσμα του πειράματος θεωρήσουμε τον τόπο διακοπών και το ταξιδιωτικό μέσο, τότε :

i) Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος

ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο Α: "η οικογένεια θα πάει με αεροπλάνο" στον τόπο των διακοπών της"

Λύση



i) Ω = { ΚΑ , ΚΠ , ΜΑυ , ΜΤ , ΜΑ}

ii) Α={ ΚΑ , ΜΑ}

'Ασκηση 2

Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες , μια άσπρη , μια μαύρη και μια κόκκινη . Κάνουμε το εξής πείραμα : παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα , καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα και καταγράφουμε επίσης το χρώμα της (όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες με επανατοποθέτηση) .

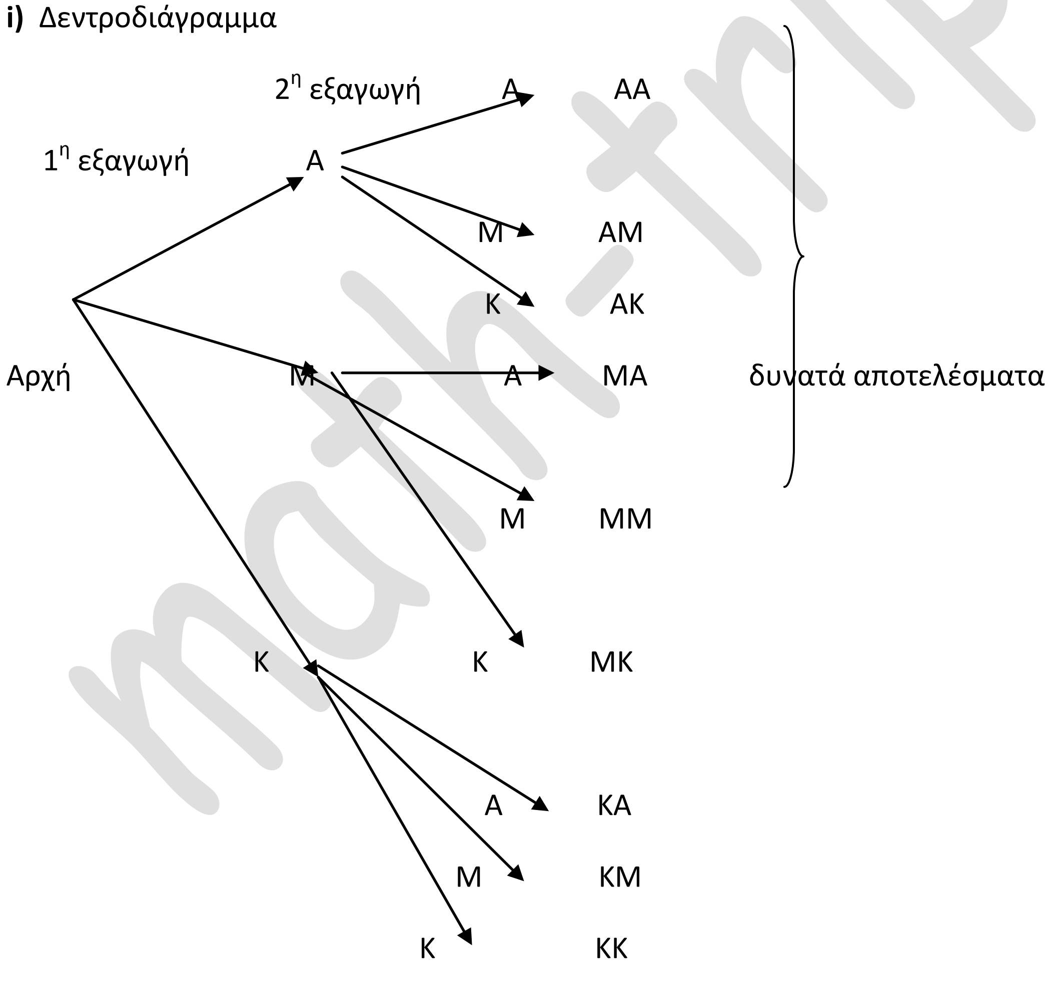
i) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος ;

ii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο " η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη"

iii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο " να εξαχθεί και τις δύο φορές μπάλα με το ίδιο χρώμα";

Λύση

i) Δεντροδιάγραμμα



Όπου Α είναι το ενδεχόμενο "η μπάλα είναι άσπρη" , Μ είναι το ενδεχόμενο "η μπάλα είναι μαύρη" και Κ είναι το ενδεχόμενο "η μπάλα είναι κόκκινη".Από το παραπάνω δεντροδιάγραμμα βρίσκουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω είναι ο Ω = { ΑΑ , ΑΜ , ΑΚ , ΜΑ , ΜΜ , ΜΚ , ΚΑ , ΚΜ , ΚΚ }

ii) Το ενδεχόμενο "η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη" είναι το { ΚΑ , ΚΜ , ΚΚ}

iii) Το ενδεχόμενο "μπάλα του ιδίου χρώματος και στις δύο εξαγωγές" είναι το { ΑΑ , ΜΜ , ΚΚ}

'Ασκηση 3

Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές . Να βρείτε τα ενδεχόμενα :

Α : "Το αποτέλεσμα της $1^{ης}$ ρίψης είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της $2^{ης}$ "

Β : "Το άθροισμα των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι άρτιος αριθμός "

Γ : "Το γινόμενο των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι μικρότερο του 5 "

Στη συνέχεια να βρείτε τα ενδεχόμενα .

$A \cap B$, $A \cap \Gamma$, $B \cap \Gamma$, $(A \cap B) \cap \Gamma$

Λύση

Στο πείραμα αυτό για να βρούμε τον δειγματικό χώρο μας συμφέρει να φτιάξουμε πίνακα διπλής εισόδου

$2^η$ ρίψη / $1^η$ ρίψη	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1 ,3)	(1,4)	(1, 5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ο δειγματικός χώρος περιέχει σαν στοιχεία όλα τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα διπλής εισόδου

Α = { (2,1) , (3,1) , (3,2) , (4,1) , (4,2) , (4,3) , (5,1) , (5,2) , (5, 3) , (5,4) , (6,1),(6,2), (6,3) , (6,4) , (6,5)}

Β = {(1,1), (1,3) , (1,5) , (2,2) , (2,4) , (2,6) , (3,1) , (3,3) , (3 ,5) , (4,2), (4,4) , (4 , 6), (5 ,1) ,(5, 3) , (5,5) , (6,2) , (6 ,4) , (6,6)}

Γ={(1,1) , (1 ,2) , (1, 3) , (1,4) , (2,1) , (2 , 2) , (3 , 1) , (4, 1)}

$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ = {(3 ,1) , (4, 2) , (5 , 1) , (5 , 3) , (6 , 2) , (6 , 4)}

$\mathrm{A}\cap\Gamma=${ (2 , 1) , (3 , 1) , (4 ,1)}

$\mathrm{B}\cap\Gamma$={ (1 , 1) , (1, 3) , (2 , 2) , (3 , 1) }

$(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cap$Γ={ (3,1) }

'Ασκηση 4

Ένα κουτί περιέχει μπάλες : 10 άσπρες (Α), 15 μαύρες (Μ) , 5 κόκκινες (Κ) και 10 πράσινες (Π). Παίρνουμε τυχαίως μια μπάλα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων η μπάλα να είναι :

i) μαύρη **ii)** μαύρη ή άσπρη **iii)** ούτε κόκκινη ούτε πράσινη

Λύση

Αφού μέσα στο κουτί υπάρχουν 10 + 15 + 5 + 10 = 40 μπάλες , θα είναι Ν(Ω) = 40

i) Έστω Μ το ενδεχόμενο : η μπάλα να είναι μαύρη . Τότε Ν(Μ) = 15

Άρα $\mathrm{P}(\mathrm{M})=\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$

ii) Έστω Α είναι το ενδεχόμενο : η μπάλα είναι άσπρη . Τότε Ν(Α) = 10

Άρα $P(A)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$

Το ενδεχόμενο : η μπάλα να είναι μαύρη ή άσπρη, είναι το $M\cup A$ με Α , Μ ασυμβίβαστα.Οπότε $P(M\cup A)=P(M)+P(A)=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$

iii) Το ενδεχόμενο : η μπάλα δεν είναι ούτε πράσινη ούτε κόκκινη , σημαίνει ότι η μπάλα είναι : μαύρη ή άσπρη , που όπως είδαμε έχει πιθανότητα $\frac{5}{8}$.

<u>'Ασκηση 5</u>

Σε έναν αγώνα η πιθανότητα να κερδίσει ο Λευτέρης είναι 30% , η πιθανότητα να κερδίσει ο Παύλος είναι 20% και η πιθανότητα να κερδίσει ο Νίκος είναι 40% . Να βρείτε την πιθανότητα

i) Να κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Παύλος

ii) Να μην κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Νίκος

<u>Λύση</u>

Έστω : Λ το ενδεχόμενο κερδίζει ο Λευτέρης, Π κερδίζει ο Παύλος και Ν κερδίζει ο Νίκος.Τότε P(Λ) = $\frac{30}{100}$, P(Π) = $\frac{20}{100}$ και P(N) = $\frac{40}{100}$

i) Το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $\Lambda\cup\Pi$ με Λ και Π ασυμβίβαστα .

Από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε ότι

$$P(\Lambda\cup\Pi)=P(\Lambda)+P(\Pi)=\frac{30}{100}+\frac{20}{100}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$$

ii) Δεν κερδίζει ο Λευτέρης ή ο Νίκος είναι το ενδεχόμενο $(\Lambda\cup N)'$ οπότε

$$P(\Lambda\cup N)'=1-P(\Lambda\cup N)=1-P(\Lambda)-P(N)=1-\frac{30}{100}-\frac{40}{100}=\frac{30}{100}$$

(πάλι τα Λ και Ν είναι ασυμβίβαστα)

'Ασκηση 6

Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A)=\frac{17}{30}$

$P(B)=\frac{7}{15}$ και $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$. Να βρείτε την $P(A\cap B)$

Λύση

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{3}=\frac{17}{30}+\frac{7}{15}-P(A\cap B)$$

$$P(A\cap B)=\frac{17}{30}+\frac{7}{15}-\frac{2}{3}$$

$$P(A\cap B)=\frac{11}{30}$$

'Ασκηση 7

Για τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω έχουμε
$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(A\cup B)=\frac{5}{6}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$. Να βρείτε την P(B)

Λύση

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \quad\Rightarrow\quad \frac{5}{6}=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{3}$$

$$P(B)=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

$$P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

'Ασκηση 8

Για τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω ισχύει
P(A) = P(B) , $P(A\cup B)=0{,}6$ και $P(A\cap B)=0{,}2$. Να βρείτε την P(A)

Λύση

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \quad\Rightarrow\quad 0{,}6 = P(A)+P(A)-0{,}2$$

$$0{,}8 = 2P(A)$$

$$P(A) = 0{,}4$$

'Ασκηση 9

Για τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω έχουμε ότι

$\mathrm{P(A)} = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P(B')} = \frac{2}{3}$ και $\mathrm{P(A \cap B)} = \frac{1}{12}$.

Να βρείτε την $P(A \cup B)$.

Λύση

$P(B') = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 - P(B) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{1}{12}$

$= \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Β. Οι ασκήσεις που πρέπει να λύσω

Ε1. Ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές και καταγράφουμε τα αποτελέσματα.

α) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

β) Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα:

Α = {να παρουσιαστεί Κ (κεφαλή) στην πρώτη ρίψη},

Β = {να παρουσιαστεί Κ στη δεύτερη ρίψη},

Γ = {να παρουσιαστεί Κ σε μία μόνο από τις δύο ρίψεις}.

γ) Είναι τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ ανά δύο ασυμβίβαστα; (Δικαιολογήστε την απάντησή σας).

Ε2. Μία βιομηχανία ελέγχει τηλεοράσεις από την γραμμή παραγωγής με τη σειρά που εξέρχονται.Ο έλεγχος σταματά όταν βρεθούν δύο ελλατωματικές τηλεοράσεις ή όταν έχουν ελεγχθεί τέσσερις τηλεοράσεις.Να υπολογίσετε τα ενδεχόμενα:

Κ:να βρεθεί ακριβώς μία ελλατωματική τηλεόραση.

Λ:να βρεθούν ακριβώς δύο ελλατωματικές τηλεοράσεις.

Μ:να βρεθούν δύο τουλάχιστον μη ελλατωματικές τηλεοράσεις.

Ν:να βρεθούν το πολύ δύο μη ελλατωματικές τηλεοράσεις.

Ε3. Έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω.Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και να εκφράσετε με την βοήθεια των συνόλων τα ενδεχόμενα:

ι)δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α,Β.

ιι)δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα Α και Β.
ιιι)πραγματοποιείται το Α και όχι το Β.
ιν)πραγματοποιείται το Β και όχι το Α.
ν)πραγματοποιείται ένα μόνο από τα Α,Β

Ε4. Ένας αθλητής είναι μέλος ενός αθλητικού συλλόγου.Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α:ο αθλητής παίζει ποδόσφαιρο.
Β:ο αθλητής παίζει μπάσκετ.
Να διατυπώσετε περιφραστικά καθένα από τα παρακάτω ενδεχόμενα:
ι)A' και B' ιι)$A \cup B$ και $A \cap B$ ιιι)Α-Β και Β-Α ιν)$(A \cup B)'$ και $(A \cap B)'$
ν)$(A-B) \cup (B-A)$ νι)$A \cup B'$ νιι)$A' \cup B$ νιιι)$A' \cap B'$.

Ε5. Μια μέρα με πολύ άσχημες καιρικές συνθήκες η πιθανότητα να λειτουργήσουν τα υπεραστικά λεωφορεία είναι 30%, η πιθανότητα να μη λειτουργήσουν τα τραίνα είναι 40% και η πιθανότητα να λειτουργήσει ένα τουλάχιστον συγκοινωνιακό μέσο από τα προηγούμενα είναι 90%. Ποια η πιθανότητα να λειτουργήσουν συγχρόνως και τα δύο;

Ε6. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι.Να βρείτε τις πιθανότητες των ενεχομένων:

ι)Α:ηένδειξη να είναι άρτια
ιι)Β:η ένδειξη να είναι περιττή
ιιι)η ένδειξη είναι άρτια και ταυτόχρονα μεγαλύτερη του 4.

Ε7. Από τις οικογένειες 30 μαθητών μίας τάξης,25 έχουν βίντεο,5 έχουν DVD και 4 έχουν και βίντεο και DVD.Επιλέγουμε τυχαία μία οικογένεια.Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

ι)Α:η οικογένεια έχει μόνο βίντεο.
ιι)Β:η οικογένεια έχει μόνο βίντεο ή μόνο DVD.
ιιι)Γ:η οικογένεια έχει μία τουλάχιστον συσκευή.
ιν)Δ:η οικογένεια δεν έχει καμία συσκευή.

Ε8. Θεωρούμε ενδεχόμενα Α, Β ενός πειράματος τύχης για τα οποία ισχύουν $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(A') = \frac{2}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Να βρείτε τις:

α) P (A). β) P (B).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Α. Οι ασκήσεις που πρέπει να ξέρω

'Ασκηση 1

Να αποδείξετε ότι ι) $\alpha^2+9\geq 6\alpha$ ιι) $2\left(\alpha^2+\beta^2\right)\geq(\alpha+\beta)^2$

ιιι) $\alpha^2+\beta^2-2\alpha+1\geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

ι) Αρκεί να δειχθεί ότι $\alpha^2-6\alpha+9\geq 0$

» $\alpha^2-2.\alpha.3+3^2\geq 0$

» $(\alpha-3)^2\geq 0$ που ισχύει

ιι) Αρκεί να δειχθεί ότι $2\alpha^2+2\beta^2\geq\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

» $2\alpha^2+2\beta^2-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2\geq 0$

» $\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0$

» $(\alpha-\beta)^2\geq 0$ που ισχύει.

ιιι) $\alpha^2+\beta^2-2\alpha+1=(\alpha^2-2\alpha+1)+\beta^2=(\alpha-1)^2+\beta^2\geq 0+0=0$

$\alpha^2+\beta^2-2\alpha+1=0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2+\beta^2=0$

$\alpha-1=0$ και $\beta=0$

$\alpha=1$ και $\beta=0$

'Ασκηση 2

Αν $3 < x < 4$, να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση

$|x-3| + |x-4|$

Λύση

$3 < x \quad \Rightarrow \quad x - 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad |x-3| = x - 3$

$x < 4 \quad \Rightarrow \quad x - 4 < 0 \quad \Rightarrow \quad |x-4| = -(x-4) = -x + 4$

Άρα $|x-3| + |x-4| = x - 3 - x + 4 = 1$

'Ασκηση 3

Να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση $|x-3| - |4-x|$, όταν

i) $x < 3$ **ii)** $x > 4$

Λύση

ι)$x < 3 \quad \Rightarrow \quad x - 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad |x-3| = -(x-3) = -x + 3$

$x < 3 \quad \Rightarrow \quad x < 4 \quad \Rightarrow \quad 4 - x > 0 \quad \Rightarrow \quad |4-x| = 4 - x$

Άρα $|x-3| - |4-x| = -x + 3 - (4 - x) = -x + 3 - 4 + x = -1$

ιι) $x > 4 \quad 4 - x < 0 \quad |4-x| = -(4-x) = -4 + x$

$x > 4 \quad x > 3 \quad \Rightarrow \quad x - 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad |x-3| = x - 3$

Άρα $|x-3| - |4-x| = x - 3 - (-4 + x) = x - 3 + 4 - x = 1$

<u>'Ασκηση 4</u>

ι)Να απλοποιήσετε την παράσταση $A=|-\chi^2-2|-|\chi^2-4\chi+4|$

ιι) Να απλοποιήσετε την παράσταση $A=2\chi+|\chi+3|-|2-\chi|$

<u>Λύση</u>

ι) Παρατηρούμε ότι: $-\chi^2-2=-(\chi^2+2)<0$ και $\chi^2-4\chi+4=(\chi-2)^2\geq 0$.

'Αρα η παράσταση γίνεται $A=-(-\chi^2-2)-(\chi^2-4\chi+4)=\chi^2+2-\chi^2+4\chi-4=4\chi-2$.

ιι) Βρίσκουμε αρχικά τις τιμές της μεταβλητής που μηδενίζουν τις παραστάσεις με τα απόλυτα: $\chi+3=0 \Leftrightarrow \chi=-3$ και $2-\chi-0 \Leftrightarrow \chi=2$.Στη συνέχεια κάνουμε πίνακα προσήμων:

χ	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$\chi+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-\chi$		$+$		$+$	0	$-$	

Τελικά διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\chi<-3$: $A=2\chi-(\chi+3)-(2-\chi)=2\chi-\chi-3-2+\chi=2\chi-5$
- Αν $-3\leq\chi\leq 2$: $A=2\chi+(\chi+3)-(2-\chi)=2\chi+\chi+3-2+\chi=4\chi+1$
- Αν $\chi>2$: $A=2\chi+(\chi+3)-[-(2-\chi)]=2\chi+\chi+3+2-\chi=2\chi+5$

<u>'Ασκηση 5</u>

Να αποδείξετε ότι :

i) $(\sqrt{8}-\sqrt{18})(\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{32}) = -14$

ii) $\left(\sqrt{28}+\sqrt{7}+\sqrt{32}\right)\left(\sqrt{63}-\sqrt{32}\right) = 31$

<u>Λύση</u>

i) $\left(\sqrt{8}-\sqrt{18}\right)\left(\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{32}\right) = \left(2\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}+2.3\sqrt{2}-2^2\sqrt{2}\right)$

$$=-\sqrt{2}\left(5\sqrt{2}+6\sqrt{2}-4\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}.7\sqrt{2} = -14$$

ii) $\left(\sqrt{28}+\sqrt{7}+\sqrt{32}\right)\left(\sqrt{63}-\sqrt{32}\right) = \left(\sqrt{2^2.7}+\sqrt{7}+\sqrt{2^4.2}\right)\left(\sqrt{3^2.7}-\sqrt{2^4.2}\right)$

$$= \left(2\sqrt{7}+\sqrt{7}+4\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{7}-4\sqrt{2}\right) = \left(3\sqrt{7}+4\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{7}-4\sqrt{2}\right)$$

$$= \left(3\sqrt{7}\right)^2-\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 63 - 32 = 3$$

'Ασκηση 6

Να αποδείξετε ότι :

i) $\sqrt{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} = \sqrt[3]{2}$ **ii)** $\sqrt[5]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} = \sqrt[3]{2}$ **iii)** $\sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[12]{3}$

iv) $\sqrt[9]{2^8} \cdot \sqrt[6]{2^5} = 2\sqrt[18]{2^{13}}$ **v)** $\sqrt{5^3} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5^4} = 25\sqrt{5}$

Λύση

i) $\sqrt{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{2^3.2}}} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[3]{2}$

ii) $\sqrt[5]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} = \sqrt[5]{2\sqrt{\sqrt[3]{2^3.2}}} = \sqrt[5]{2\sqrt[6]{2^4}} = \sqrt[5]{\sqrt[6]{2^6.2^4}} = \sqrt[30]{2^{10}} = \sqrt[3]{2}$

iii) $\sqrt[4]{3^3} \,.\, \sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^{3.3}} \,.\, \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{3^{3.3}.\,3^4} = \sqrt[12]{3^{13}} = \sqrt[12]{3^{12}.\,3} = 3\sqrt[12]{3}$

iv) $\sqrt[9]{2^8} \,.\, \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[18]{2^{16}} \,.\, \sqrt[18]{2^{15}} = \sqrt[18]{2^{16}.\,2^{15}} = \sqrt[18]{2^{31}} = \sqrt[18]{2^{18}.2^{13}} = 2\sqrt[18]{2^{13}}$

v) $\sqrt{5^3} \,.\, \sqrt[3]{5} \,.\, \sqrt[6]{5^4} = \sqrt[6]{5^9} \,.\, \sqrt[6]{5^2} \,.\, \sqrt[6]{5^4} = \sqrt[6]{5^9.5^2.5^4} = \sqrt[6]{5^{15}} = \sqrt{5^5} = \sqrt{5^4.5}$

$= 5^2\sqrt{5} = 25\sqrt{5}$.

Β. Οι ασκήσεις που πρέπει να λύσω

Ε1. Να αποδείξετε οτι:

ι) $\alpha(\alpha+4\beta)\geq\beta(2\alpha-\beta)$ ιι) $\beta(\alpha-\beta)-\alpha(\alpha-2\beta)\leq\alpha\beta$

ιιι) $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\geq\beta(4\alpha-5\beta)$ ιν) $4\beta(\alpha-2\beta)\leq(\alpha-\beta)^2$

Ε2. Ομοίως: ι) $\alpha^2-4\alpha+5\succ 0$ ιι) $2\alpha^2-10\alpha+25\succ 0$ ιιι) $\alpha^2-\alpha+1\succ 0$

ιν) $\alpha^4-7\alpha^2+16\succ 0$

Ε3. Αν $-4\prec x\prec -1$ να αποδείξετε οτι οι παρακάτω παραστάσεις είναι

ανεξάρτητες του χ : ι)|χ+4|-2|χ+1|+3|χ| ιι)|2χ-3|-|1-3χ|+|-χ|

Ε4. Να γράψτε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές :

ι)|χ+1|+|χ+3| ιι)|χ-2|-||2χ+4| ιιι)|χ|+|χ-1|+|3-χ|

ιν)|χ+4|-2χ +|χ-3|.

Ε5. Δίνεται η παράσταση Α=χ-d(χ,-3)+d(5,χ)

Να γράψετε την παράσταση Α:

α)χρησιμοποιώντας το συμβολο της απόλυτης τιμής.

β)χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής(δηλαδή να βγάλετε τα απόλυτα).

Ε6. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

Α = $\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{(x+1)^2}$, αν $|x|\leq 1$

Β = $\left(a\sqrt{\beta}-2\beta\sqrt{\alpha}\right)\left(2\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right)+\sqrt{\alpha\beta}\left(\alpha+4\beta\right)$ με α>0 και β>0.

Ε7. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με τη μορφή μιας ρίζας

I. $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$

II. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\alpha^4\beta^8}}$

III. $\sqrt{2^3}\cdot\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[4]{2}$

IV. $\sqrt[12]{2^{11}}\div\sqrt[4]{2^3}$

Ε8. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

Ι. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

ΙΙ. $\sqrt{\sqrt{3}+2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

Ε9. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\sqrt{(x+2)^2}-1$.

- Ι. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της .
- ΙΙ. Να γραφεί ο τύπος της f σε πιο απλή μορφή .
- ΙΙΙ. Να λυθεί η εξίσωση f(x) = 0

Ε10. Δίνεται η συνάρτηση f με f (x) = $\dfrac{|x+2|+|x-2|}{|x+2|-|x-2|}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να δείξετε ότι είναι περιττή

γ) Να απαλείψετε τα απόλυτα και να απλοποιήσετε τον τύπο της

Ε11.Ομοίως αν $-1\prec x\prec 3$: Α= $\dfrac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x+1}-\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Α. Οι ασκήσεις που πρέπει να ξέρω

'Ασκηση 1

Να λυθεί η εξίσωση : $\frac{4-5|x-3|}{12}-\frac{|3\chi-9|-3}{2}=|6-2\chi|-6$

Λύση

$\frac{4-5|x-3|}{12}-\frac{|3\chi-9|-3}{2}=|6-2\chi|-6 \Leftrightarrow$

$\frac{4-5|x-3|}{12}-\frac{|3(x-3)|-3}{2}=|-2(x-3)|-6 \Leftrightarrow$

$\frac{4-5|x-3|}{12}-\frac{3|(x-3)|-3}{2}=2|(x-3)|-6 \Leftrightarrow$

$12\cdot\frac{4-5|x-3|}{12}-12\cdot\frac{3|x-9|-3}{2}=12\cdot 2|x-3|-12\cdot 6 \Leftrightarrow$

$4-5|x-3|-6(3|x-3|-3)=24|x-3|-72 \Leftrightarrow$

$4-5|x-3|-18|x-3|+18=24|x-3|-72 \Leftrightarrow$

$-5|x-3|-18|x-3|-24|x-3|=-72-18-4 \Leftrightarrow -47|x-3|=-94 \Leftrightarrow |x-3|=2$

$\Leftrightarrow x-3=2$ ή $x-3=-2 \Leftrightarrow x=5$ ή $x=1$

'Ασκηση 2

Να λυθεί η εξίσωση $2|3-x|-|2x+5|=0$

Λύση

$2|3-x|-|2x+5|=0 \Leftrightarrow 2|3-x|=|2x+5| \Leftrightarrow 2(3-x)=2x+5$ ή

$2(3-x)=-(2x+5) \Leftrightarrow (6-2x=2x+5\ \ 4x=1\ \ x=\frac{1}{4})$ ή $(6-2x=-2x-5 \Leftrightarrow$

$0x=1$ αδύνατη$)$